6. Másodfokú függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek

Másodfokú függvények:

Def.: f:R→R; $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

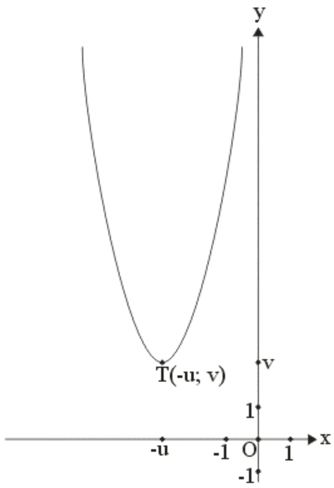
- ábrázolás (teljes négyzetté kiegészítéssel)

  $f(x) = a(x+u)^2 + v$

  a>0 felfelé nyitott parabola

  a<0 lefelé nyitott parabola

  T(-u; v)
- jellemzés: a hatványfüggvényeknél szerepel



Másodfokú egyenletek:

- Általános nullára redukált alak

  $ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$

  TÉTEL: A másodfokú egyenlet megoldóképlete: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

  Az $ax^2 + bx + c = 0 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ másodfokú egyismeretlenes egyenlet diszkriminánsa:

  $D = b^2 - 4ac$

  Ha *D>0*, akkor az egyenletnek 2 különböző valós gyöke van.
  Ha *D=0*, akkor az egyenletnek 2 egybeeső valós gyöke van.
  Ha *D<0*, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke.

  $ax^2 + bx + c = 0 \qquad$ a,b,c∈R, $a \neq 0$

  $$a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$$

  $$a(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) = 0$$

  $$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

  Ha a $b^2 - 4ac < 0$, akkor nincs valós megoldás.

  Legyen a $b^2 - 4ac \geq 0$!

  $$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0$$

  $$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

  $$a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

  $$x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \text{ vagy } x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Gyöktényezős alak

  $p(x) = ax^2+bx+c \qquad a \neq 0$

  $ax^2+bx+c=0 \qquad D \geq 0 \qquad$ x_1; x_2 a két gyök

  $ax^2+bx+c \equiv a(x-x_1)(x-x_2)$

- Viète-formulák

  $ax^2+bx+c=0 \qquad a \neq 0 \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \qquad D \geq 0$

  $$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

  $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ a másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja

  $ax^2+bx+c \equiv a(x-x_1)(x-x_2)$

  $ax^2+bx+c \equiv ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2$

  $b=-a(x_1+x_2)$ és $c=ax_1\cdot x_2$

  $$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

  $$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

- Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek

  Pl.: 1. $ax^{2n}+bx^n+c=0 \qquad a \neq 0 \qquad y=x^n$

  2. $ax^4+bx^3+cx^2+\lambda\cdot bx+\lambda^2\cdot a=0 \qquad /:x^2 \qquad \lambda \neq 0,\ x^2 \neq 0$

  $$a\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+c=0$$

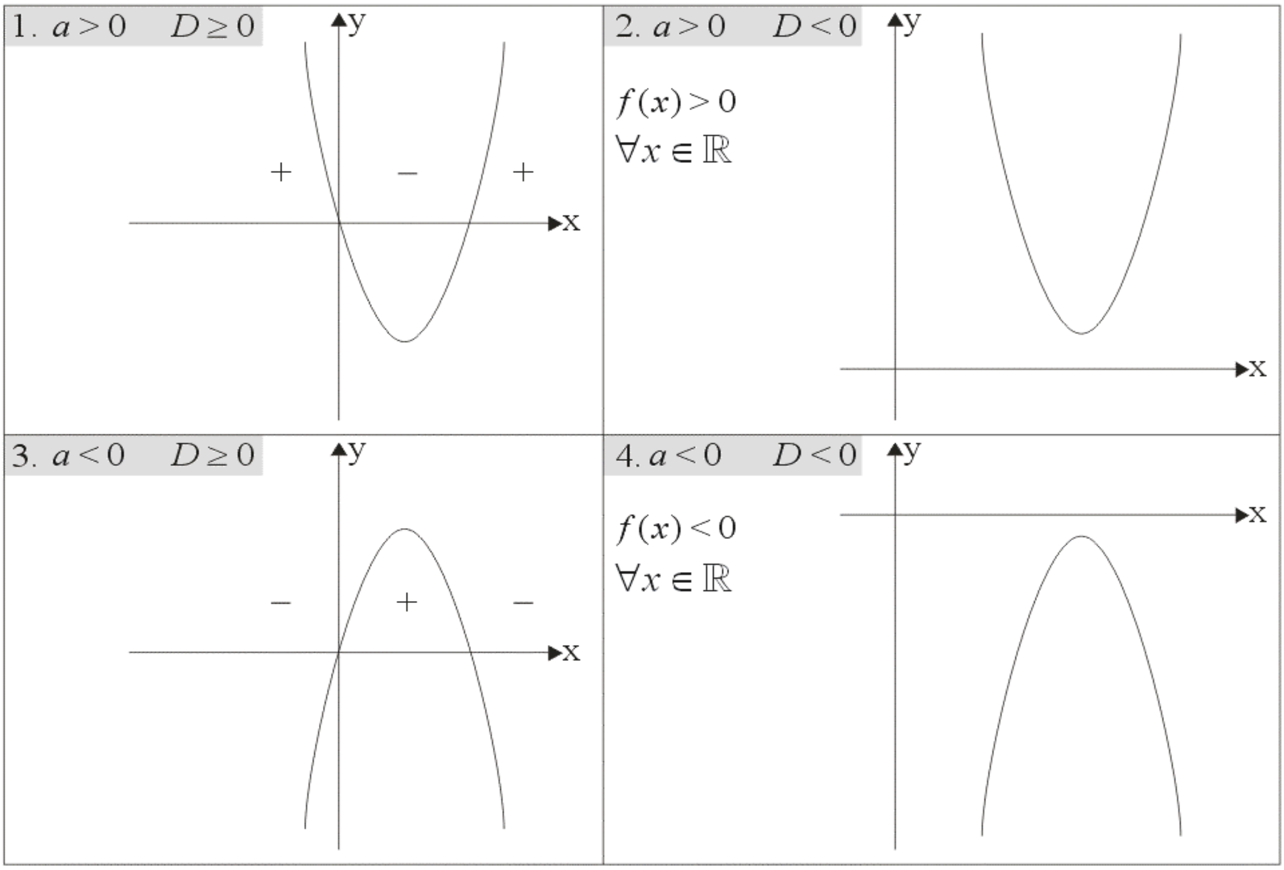
  $$a(y^2-2\lambda)+by+c=0$$

<u>Másodfokú egyenlőtlenségek:</u>

$ax^2+bx+c>0 \qquad a \neq 0$

$\qquad (<0)$

f:R→R; $f(x)=ax^2+bx+c$



Alkalmazások:

- magasabb fokú egyenletek
- szöveges feladatok
- szélsőérték feladatok
- fizikai folyamatok: út-idő egyenletesen változó mozgás esetén
- hajítások