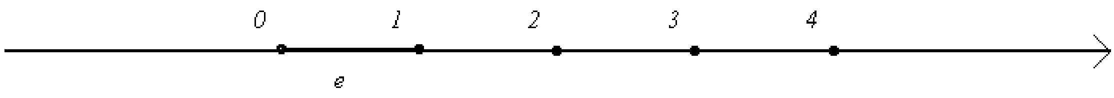
23. A mérés (szög, hosszúság, terület, térfogat)

A mérés során egy adott mennyiséghez rendelt mértékegység számszorosaként kapjuk az adott mennyiséget.

1. Hosszúság

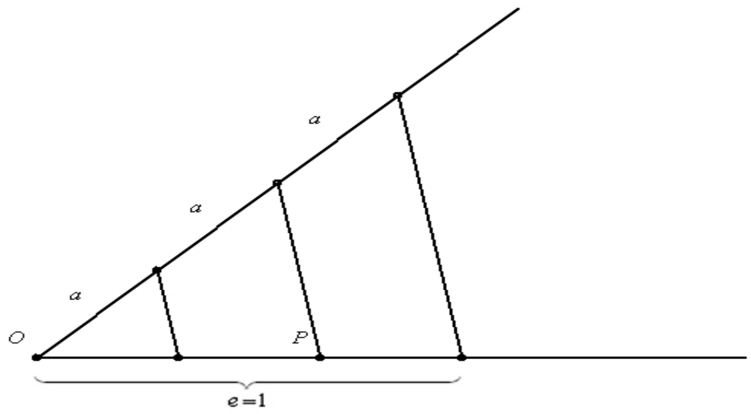
Önkényesen választható egység: e

Számegyenes



Az egység segítségével az egész számok feltüntethetők.

A racionális számok feltüntetése (így racionális hosszúság mérése) a párhuzamos szelők tételének segítségével lehetséges. Példa:



$$\frac{OP}{1} = \frac{2a}{3a}$$

$OP = \frac{2}{3}$ egység

- a racionális számok szerkeszthetők, így a számegyenesen egyértelműen feltüntethetők
- irracionális számok: belátható (analízis eszközeivel), hogy egyértelműen feltüntethetők

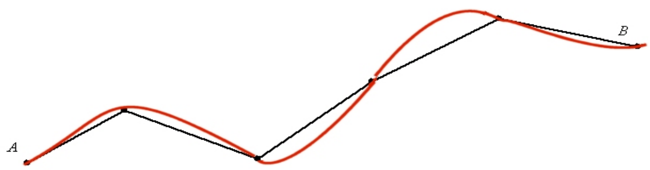
kaptuk:

szakasz mérése↔a valós számok értelmezése↔a számegyenes

A sokszögek (a törött vonalak) kerülete szakaszmérésre visszavezethető.

Görbe vonalak hossza:

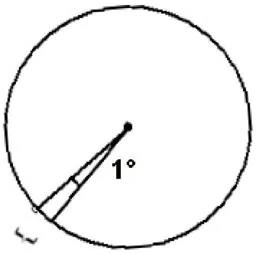
- A kör kerülete $2r\pi$, amit integrálással kiszámolhatunk
- Általában integrálszámítással lehetséges

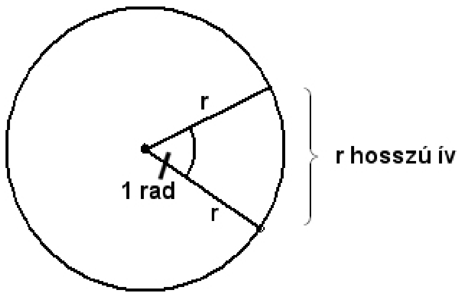


közelítő poligon

2. Szögmérés

Egység választása: fok vagy radián





az ív hossza 360-ad része a kör kerületének

TÉTEL: Az ívhossz és a középponti szög egyenesen arányos.

$360^{\circ} \leftrightarrow 2\pi\ rad$

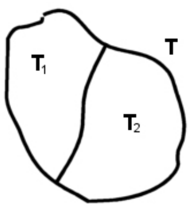
$180° \leftrightarrow \pi\ rad$

$\left(1\ rad \approx 57{,}3°\right)$

3. Terület (korlátos síkidomokra)

axiómák:

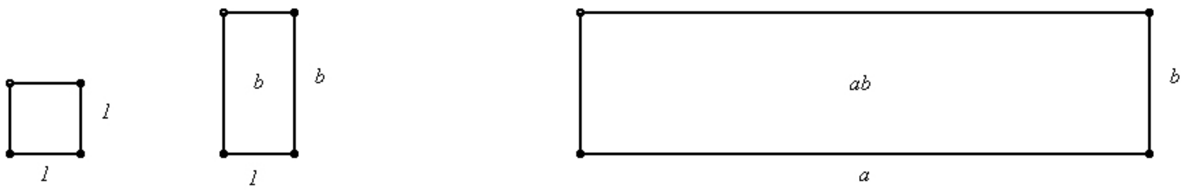
1. az egységnégyzet területe: 1
2. a síkidom területe nem negatív: $T \geq 0$
3. egybevágó síkidomok területe egyenlő
4. ha egy síkidomnak van területe, akkor két részre bontva a részeknek is van területe, és összegük az eredeti síkidom területe



$$T = T_1 + T_2$$

területképletek levezetése:

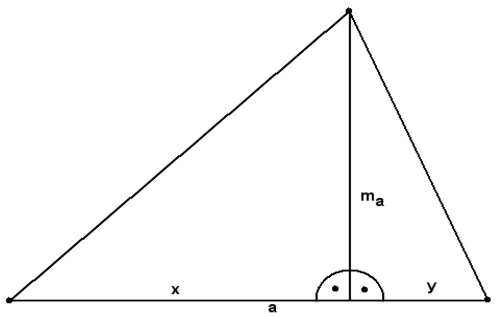
- téglalap: $T = a \cdot b$ bizonyítható az axiómák segítségével



Nevezetes sokszög-területképletek levezetése

<u>TÉTEL</u>: a háromszög területe $t_{\Delta} = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$

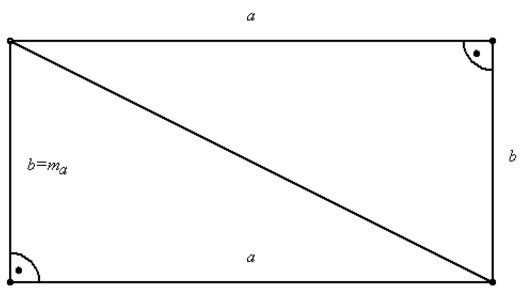
a)



$$a = x + y$$

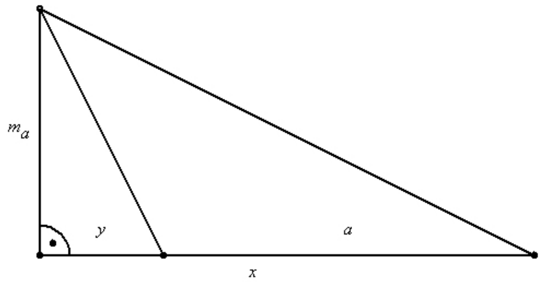
$$t = \frac{x \cdot m_a}{2} + \frac{y \cdot m_a}{2} = \frac{m_a(x+y)}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

b)



$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

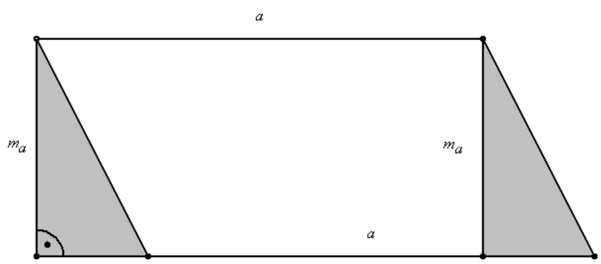
c)



$$a = x - y$$

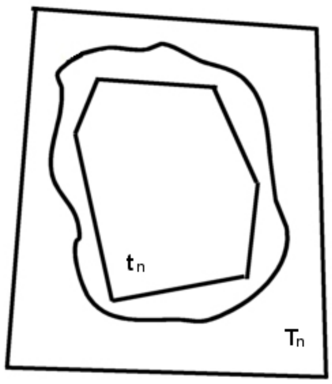
$$t = \frac{x \cdot m_a}{2} - \frac{y \cdot m_a}{2} = \frac{m_a(x-y)}{2} = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

TÉTEL: a paralelogramma területe $t = a \cdot m_a$



Sokszögekre a területszámítás:
a háromszög terület számítására visszavezethető

Általános területfogalom   Def.: t létezik, ha
t_n felső határa= T_n alsó határa
pl.: körre: $t = \pi \cdot r^2$ (integrálszámítással)



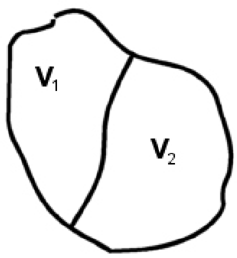
Az [a;b] intervallumon nem negatív, integrálható f(x) függvény görbéje alatti terület:

$$T = \int_a^b f(x)\, d(x)$$

4.Térfogat

axiómák:

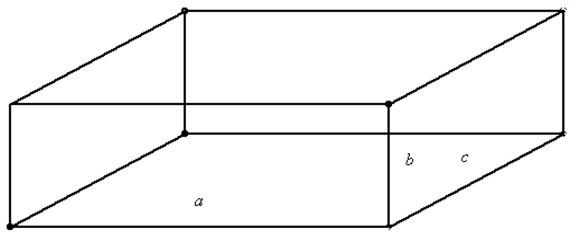
1. az egységkocka térfogata: 1
2. a test térfogata nem negatív $V \geq 0$
3. egybevágó testek térfogata egyenlő
4. ha egy testnek van térfogata, akkor kettébontva a részeknek is van, és összegük az eredeti test térfogata



$$V = V_1 + V_2$$

Az [a;b] intervallumon nem negatív, folytonos f(x) függvény görbéjének az x tengely körüli megforgatással kapott forgástest térfogata: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

TÉTEL: a téglatest térfogata: $V = a \cdot b \cdot c$

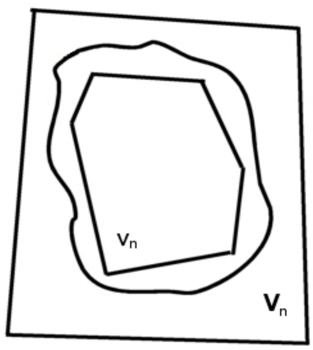


ugyanúgy, mint a téglalapra

Nevezetes poliéderek térfogata:

- paralelepipedon: T·m
- háromszög alapú hasáb: T·m (határérték számítással)
- sokszög alapú hasáb
- tetraéder: $\frac{T \cdot m}{3}$
- gúla

Általános térfogatfogalom



V_n: köré írt poliéderek térfogatsorozata
v_n: beírt poliéderek térfogatsorozata

Alkalmazások

- felszínszámítás: poliéderekre a sokszögek területével
  gömbre, forgástestekre integrálszámítással
- kilométeróra elve
- fizikai űrmérték, hőtágulás (lineáris, térfogat), minimálfelületek
- földmérés
- könnyűipar