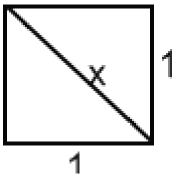
2. Számhalmazok, halmazok számossága

1. Számhalmazok

Def.: $Z^+, N, Z, Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a; b \in Z, b \neq 0 \right\}$

$Z^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 (Pitagorasz - tétel)$

x nem rac. ; jel. $x = \sqrt{2}$

TÉTEL: A $\sqrt{2}$ irracionális

Biz.: indirekt biz.

Tfh. $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad p, q \in Z^+$

$\downarrow\downarrow$

$2 = \frac{p^2}{q^2}$

$2 \cdot q^2 = p^2$

Mivel a jobb oldalon négyzetszám szerepel, ezért ezen az oldalon a prímtényezős alakban minden prímhatvány kitevője páros.
A másik oldalon viszont egy négyzetszám kétszerese áll, ezért a prímtényezős alakban a 2 kitevője biztosan páratlan, így a két oldal nem lehet egymással egyenlő.
Ellentmondásra jutottunk, tehát a $\sqrt{2}$ irracionális szám.

$R = Q \cup Q^*$

Egy valós szám akkor és csak akkor racionális, ha felírható végtelen szakaszos tizedestört alakban (véges tizedestörtet is annak tekintjük, a 0-k ismétlődnek)
Az irracionális számok tizedestört alakja végtelen, nem szakaszos tizedestört.

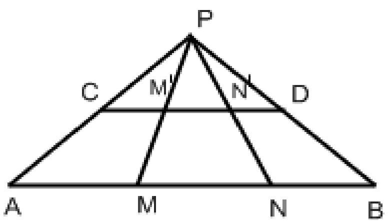
$R \subset C$

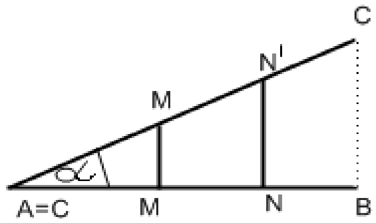
Komplex számok a $z = a + bi$ alakú számok, ahol $a, b \in R$ és i az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet megoldása; $i^2 = -1$.
a: valós rész
bi: képzetes rész
Ha b=0 akkor $z \in R$

Ekvivalens halmazok: A és B halmazok ekvivalensek(azonos számosságúak) ha A és B elemei között létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (párba állítás).

Jele: A~B

Tulajdonságok: A~A reflexív
A~B esetén B~A szimmetrikus
A~B és B~C akkor A~C tranzitív
Például: bármely két szakasznak ugyanannyi pontja van.





$N \sim Z$

$$0 \leftrightarrow 0$$
$$2n-1 \leftrightarrow -n$$
$$2n \leftrightarrow n$$

$N \sim Q \sim (a;b) \qquad a,b \in Z$

<u>2. Végtelen halmazok</u>

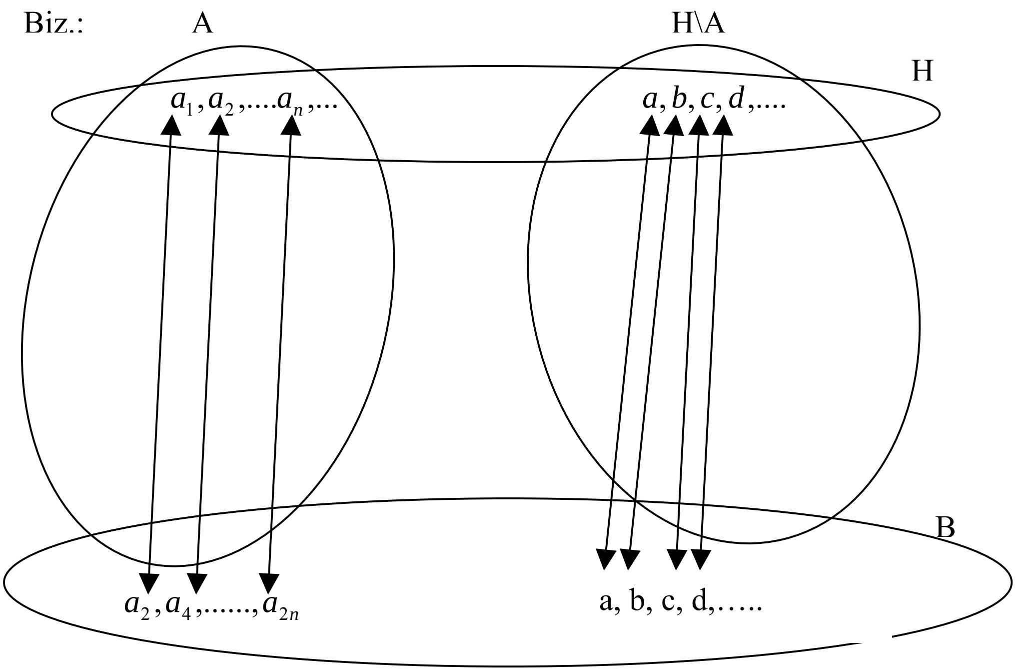
Megszámlálhatóan végtelen halmaz: azok a halmazok, amelyek ekvivalensek a természetes számok halmazával.
Egy halmaz megszámlálható, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
Kontinuum számosság: a valós számok számossága.

TÉTEL:
Minden végtelen halmazból kiválasztható megszámlálhatóan sok elemet tartalmazó halmaz:

H végtelen halmaz
$a_0 \in H$
$a_1 \in H \setminus \{a_0\}$
…
$A = \{a_i \mid a_i \in H \setminus \{a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{i-1}\}, i = 1,2,\ldots\}$
Az $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots\}$ halmaz esetén A~N mert $a_n \leftrightarrow n-1$.

TÉTEL:
Minden végtelen halmaznak van vele ekvivalens részhalmaza.

Biz.:



B=(H\A)$\cup\{a_2, a_4 ..., a_{2n}, ...\}$

Ekkor B ~ A és B $\subset$ H.

Alkalmazások: kombinatorika: lottóhúzás(5 elemű részhalmazok száma);
binomiális tétel,
binomiális együtthatók;
komplex számok: fizikában, kombinatorikus azonosságok igazolása;
trigonometrikus azonosságok igazolása;