

### 3. Hatványozás, hatványfüggvények

Definíciók:

- Ha a kitevő nagyobb, mint 1, akkor a szám n-edik hatványa olyan n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője maga a szám.  
 $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  (n db)  $n \in (\mathbb{N}^+ \setminus \{1\})$
- Bármely szám első hatványa maga a szám.  
 $a^1 = a$
- Bármely 0-tól különböző szám 0. hatványa 1. (permanencia-elv)
- Egy 0-tól különböző valós szám negatív egész kitevőjű hatványa egyenlő a szám ellentett kitevőjű hatványának reciprokával.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, n \in \mathbb{Z}^+, a \neq 0$$

- Az  $a^{\frac{p}{q}}$  jelenti azt a számot, amelynek q-adik hatványa  $a^p$ . (q poz. egész, p egész)

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p \Leftrightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

- Irracionális kitevőjű hatvány szemléletesen

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = ? & \quad 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\ & \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ & \quad 1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\ & \quad 1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \end{aligned}$$

A permanencia-elv érvényesül, megmaradnak a hatványozás azonosságai.

TÉTELEK:

- Hatványozás azonosságai pozitív egész kitevőkre:

$$\circ a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (m, n \in \mathbb{Z}^+), a \in \mathbb{R}, \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ db}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}} = a^{m+n}$$

$$\circ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n, a \neq 0 \quad \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ db}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ db}}} = a^{m-n}, \text{ ha } m < n \Rightarrow \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$\circ (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ db}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db}} \cdot \dots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ db}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n \text{ db}} = a^{m \cdot n}$$

$$\circ (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ db}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \dots \cdot b)}_{n \text{ db}} = a^n \cdot b^n$$

$$\circ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{ndb} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{ndb}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{ndb}} = \frac{a^n}{b^n}$$

• Permanencia elv:

$$a^0 = 1, m \in \mathbb{N}, n = 0$$

pl.:  $a^{m+0} = a^m$  úgy terjesztjük ki a definíciót bővebb számkörre, hogy

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \underbrace{a^0}_1 = a^m$$

érvényesek maradjanak a hatvány azonosságok

• Racionális kitevő esetén:

Ha  $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}}$ , negatív alap esetén nem értelmezzük!

Permanencia-elv:

$$a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}$$

$$a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s} \cdot a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

Hatványfüggvények:

Def.:  $f : H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$  és  $H \subseteq \mathbb{R}$ .

Spec. esetek:  $\alpha \in \mathbb{N}^+ \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^+$

$$\alpha = -1 \quad g : \mathbb{R} / \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}$$

$n = 1 \Rightarrow$  lineáris fgv.

$n = 2 \Rightarrow$  másodfokú fgv.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

- Zérushelye:  $x=0$ .
- Max. hely: nincs.
- Min. hely:  $x=0$ .
- Monotonitás: a  $]-\infty; 0]$ -on szig. mon. csökkenő, a  $[0; \infty[$ -on szig. mon. növekvő.
- Páros fgv.  $\Rightarrow$  y tengelyre szimmetrikus.
- Konvex.

Zérushely: Az értelmezési tartomány azon részeit nevezzük zérushelynek, ahol a függvény 0-t vesz fel.

Szélsőérték: Az függvénynek az értelmezési tartománya  $x_0$  helyén maximuma (minimuma) van, ha az ott felvett függvényértéknél nagyobb (kiseb) sehol nem vesz fel.

Monotonitás: Az  $f$  függvénynek az értelmezési tartománya  $[a; b]$ -án szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha bármely  $x_1, x_2 \in [a; b], x_1 < x_2$  esetén  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).

Definíció:  $f : H \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$

Ha minden  $x \in H$  esetén  $-x \in H$  és  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ), akkor az  $f$  függvényt párosnak (páratlannak) nevezzük.

A páros függvény grafikonja szimmetrikus az  $y$  tengelyre, a páratlané az origóra.

Definíció: Legyen az  $f$  függvény differenciálható  $[a;b]$ -n. Ha az  $f$  függvény grafikonjának bármely pontjába húzott érintő a függvény grafikonja felett (alatt) van, akkor az  $f$  függvény az adott intervallumon konkáv (konvex).

$n=2k \Rightarrow$  páros,  $y$  tengelyre szimmetrikus.

$n=2k + 1 \Rightarrow$  páratlan, origóra szimmetrikus

harmadfokú függvény:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$$

- Zérushely:  $x=0$ .
- Szélsőérték: nincs.
- Monotonitás:  $]-\infty; 0[$ -on szigorúan monoton nő
- Páratlan függvény  $\Rightarrow$  origóra szimmetrikus
- Ha  $x \in ]-\infty; 0[$ , akkor konkáv. Ha  $x \in ]0; \infty[$ , akkor konvex.  $x=0$  inflexiós pont.

$n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$ ; páratlan, origóra szimmetrikus.

Alkalmazások:

- $F(x) = D \cdot x$  rugóerő
- $E_{\text{rug}} = \frac{1}{2} D x^2$
- $F_c = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$
- radioaktív bomlás
- kamatszámítás
- nevezetes azonosságok
- mértani sorozatok.