5. Logaritmus, logaritmus függvény, exponenciális függvény

Logaritmus: a alapú logaritmus b az a kitevő, amelyre az a-t hatványozva b-t kapunk.
Jelölés: $\log_a b$ [a: logaritmus alapja]

$a^{\log_a b} = b$, $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Tételek: logaritmus azonosságai

- $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$, $a, b, c > 0, a \neq 1$

  A szorzat logaritmusa egyenlő a tényezők adott alapú logaritmusának összegével.
  Bizonyítás:
  $a^{\log_a bc} = bc$ (1) (definíció szerint)
  $a^{\log_a b} = b$ (2)
  $a^{\log_a c} = c$ (3)
  (2) és (3) ➔ $b \cdot c = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$ (4) (azonos alapú hatványok szorzása)
  (1) és (4) ➔ $a^{\log_a bc} = a^{\log_a b + \log_a c}$
  Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:
  $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

- $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

  A hányados adott alapú logaritmusa egyenlő a számláló adott alapú logaritmusának és a nevező adott alapú logaritmusának különbségével.
  Bizonyítás:
  $a^{\log_a \frac{b}{c}} = \frac{b}{c}$ (1) (definíció szerint)
  $a^{\log_a b} = b$ (2)
  $a^{\log_a c} = c$ (3)
  (2) és (3) ➔ $\frac{b}{c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = a^{\log_a b - \log_a c}$ (4) (azonos alapú hatványok osztása)
  (1) és (4) ➔ $a^{\log_a \frac{b}{c}} = a^{\log_a b - \log_a c}$
  Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:
  $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

- $\log_a b^n = n \log_a b$, $n \in R$

  A hatvány adott alapú logaritmusa egyenlő az alap adott alapú logaritmusa és a kitevő szorzatával.
  Bizonyítás:
  $a^{\log_a b} = b$ (1)
  $a^{\log_a b^n} = b^n$ (2)
  (1) és (2) ➔ $b^n = (a^{\log_a b})^n = a^{n \log_a b}$ (3)

(2) és (3) ➔ $a^{\log_a b^n} = a^{n \cdot \log ab}$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

- **Speciális eset**: $\log_a \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \log_a b$, $k \in (Z^+ / \{1\})$

  Bizonyítás: $\log_a \sqrt[k]{b} = \log_a b^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \log_a b$

- **Áttérés más alapú logaritmusra**:

  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ a,b,c > 0; a \neq b; c \neq 1; a \neq 1$$

  Bizonyítás:

  $b = a^{\log_a b}$ (1)

  $b = c^{\log_c b}$ (2)

  $a = c^{\log_c a}$ (3)

  (1) és (2) és (3) ➔ $c^{\log_c b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b}$

  ➔ $c^{\log_c b} = c^{\log_c a \cdot \log_a b}$

  Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

  $$\log_c b = \log_c a \cdot \log_a b$$

  $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Számolás logaritmussal:

- 10-es alapú logaritmus

  $$0{,}0321 = 3{,}21^6 \cdot 10^{-12}$$

  $$\lg 0{,}0321 = \lg 3{,}21^6 + \lg 10^{-12} = 6 \cdot \lg 3{,}21 - 12$$

  $$\lg(2{,}5 \cdot 10^5) = \underbrace{\lg 2{,}5}_{mantissza} + \underbrace{5}_{karakterisztika}$$

- természetes alapú logaritmus Napier-féle táblázat alapszáma: e

  $$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

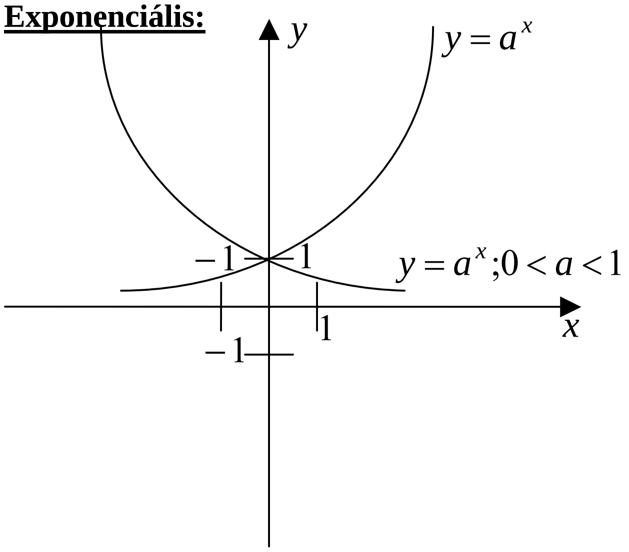
Logaritmus függvény, exponenciális függvény

Definíció:

$$f : R \to R^+; f(x) = a^x; a > 0, a \neq 1$$

$$g : R^+ \to R; g(x) = \log_a x; a > 0, a \neq 1$$

Exponenciális:



$D_f : R$

$R_f : R^+$

zérushely: nincs

szélsőérték: nincs

$a > 1$ szigorúan monoton növekszik, $a < 1$ szigorúan monoton csökken.

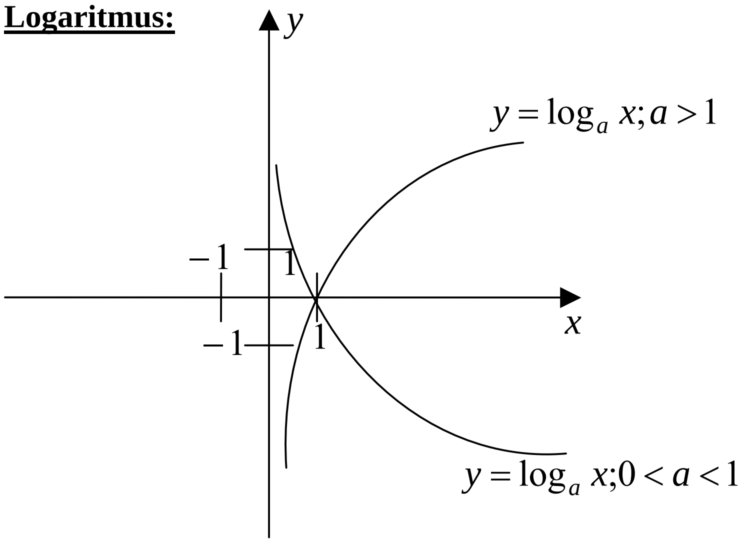
alulról korlátos, felülről nem.

folytonos

konvex

se nem páros, se nem páratlan.

Logaritmus:



$R_f = R$

zérushely: $x = 1$

$a > 1$ szigorúan monoton nő, konkáv

$0 < a < 1$ szigorúan monoton csökken, konvex

nem korlátos

szélsőérték: nincs

folytonos
se nem páros, se nem páratlan.

$f:R \to R^+; f(x)=a^x$

$g:R^+ \to R; g(x)=\log_a x$

$g=f^{-1},\ f=g^{-1}$

Alkalmazások:

- kamatos kamat
- radioaktív anyag bomlástörvénye
- exponenciális kapcsolat folyamatoknál
- savas és bázikus kémhatás pH értéke
- logaritmusos, exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek