8. Nevezetes számsorozatok

Számsorozat: azokat a függvényeket, amelyek minden pozitív természetes számhoz (azok sorrendjében) egy-egy valós számot rendelnek, számsorozatoknak nevezzük.

Megoldása:
- Általános taggal: $a_n=2n$
- Rekurzív módon: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_0=1, a_1=1$

Lehet korlátos (alulról, vagy felülről) és monoton.

Számtani sorozat: az olyan számsorozatokat, amelyekben a 2. tagtól kezdve bármely tagnak és a közvetlenül előtte álló tagnak különbsége állandó, számtani sorozatnak nevezzük.

$$a_{n+1}-a_n=d=\text{áll.}$$
$$a_{n+1}=a_n+d$$
$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2} \quad n\geq 2$$

Tételek:
- Az n-edik tag

$a_1=a_1$
$a_2=a_1+d$
$a_3=a_2+d=a_1+2d$
Sejtés:
$an=a_1+(n-1)d$
$a_{n+1}=a_n+d=a_1+(n-1)d+d=a_1+nd$
- Az első n elem összege

$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$

$$\left.\begin{array}{l} S_n=a_1+(a_1+d)+\ldots+(a_1+(n-2)d)+(a_1+(n-1)d \\ S_n=(a_n-(n-1)d)+(a_n-(n-2)d)+\ldots+(a_n-d)+a_n \end{array}\right\}$$

$S_n=n\,(a_1+a_n)$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$$

Mértani sorozat: az olyan sorozatokat, amelyben a 2. tagból kezdve bármely tagnak és a közvetlenül előtte álló tagnak a hányadosa állandó, mértani sorozatoknak nevezzük.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q=áll. \qquad a_{n-1}\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-1}=\dfrac{a_n}{q} \\ a_{n+1}=a_n\cdot q \end{array}\right\} \qquad a_n^{\,2}=a_{n-1}\cdot a_{n+1} \qquad |a_n|=\sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$

Tételek:
- Az n-edik tag

$a_1=a_1$
$a_2=a_1\cdot q$
$a_3=a_2\cdot q$
Sejtés: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$
$a_{n+1}=a_n\cdot q=a_1\cdot q^{n-1}\cdot q=a_1\cdot q^n$

- *Az első n elem összege:* $q = 1$ esetén $S_n = na_1$. $q \neq 1$ esetén:

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$
$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 \cdot q^{n-2} + a_1 \cdot q^{n-1} \qquad / \cdot q$
$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$
$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

<u>Fibonacci-sorozat:</u>

$a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$

- Hány nyúlpár származik 1 pár nyúltól 1 év alatt, ha tudjuk, hogy minden pár havonta 1 új párnak ad életet, és az újszülött nyulak 2 hónapos kortól lesznek ivarérettek?
- 2×n-es téglalap hányféleképpen fedhető le 1x2-es dominókkal?
- Pascal-háromszög

Általános tagja:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

<u>Néhány tulajdonság:</u>

a) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$
b) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$
c) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

<u>Alkalmazás:</u>

- Kamatos kamat számítása
- Mértani sor: valós számok tizedestört alakja
- Törlesztés évi részletével számítása
- Összegzési problémák