9. Az analízis elemei

A felelet felépítése:
Először a sorozat határértékének fogalmát ismertetjük, kiemelve, hogy központi szerepe van, mivel a további definíciók (folytonosság, függvény határérték, differenciálhányados) erre épülnek. Beszélünk a konvergens sorozatok legfontosabb tulajdonságairól (konvergens sorozat korlátos, műveletek konvergens sorozatokkal, korlátos és monoton sorozat konvergens), megemlítjük néhány nevezetes sorozat határértékét.
Ezek után következhet a függvény folytonosság, határérték, differenciálhányados, primitív függvény(antiderivált)-határozatlan integrál, majd a határozott integrál.

A konvergencia definíciója: Az a_n sorozat konvergens és határértéke a, ha bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén megadható $N(\varepsilon)$ (ε-től függő) küszöbszám, hogyha $n > N$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$

Jelölés: $a_n \to a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to a$

A pontban való folytonosság két definíciója:

- Heine: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont valamely környezetében. Az f függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármely $x_n \to x_0$ $(x_n \in D_f)$ sorozat esetén az $f(x_n) \to f(x_0)$.
- Cauchy: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont valamely környezetében. Az f függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármely pozitív ε esetén megadható olyan $\delta > 0$ szám ($\delta(\varepsilon)$), hogyha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Végesben vett határérték definíciója:

- Heine: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és az A, ha bármely $x_n \to x_0$ $(x_n \in D_f, x_n \neq x_0)$ sorozat esetén $f(x_n) \to A$.
- Cauchy: Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és az A, ha bármely pozitív ε esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogyha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$
- Jelölés: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Végtelenben vett határérték definíciója:

1. Legyen az f függvény értelmezve az x_0 pont valamely környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az f függvénynek az x_0 pontban vett határértéke $+\infty(-\infty)$, ha bármely $K \in R$ esetén létezik $\delta > 0$, hogyha $0 < |x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$

($f(x) < K$).

Az f függvénynek az x_0 pontban vett határértéke végtelen, ha bármely $x_n \to x_0$ $(x_n \in D_f, x_n \neq x_0)$ esetén $f(x_n) \to \infty$.

2. Az f függvénynek a határértéke $+\infty(-\infty)$-ben A, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén megadható $K \in R$, hogyha $x > K$ ($x < K$), akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

   f függvénynek a határértéke $+\infty(-\infty)$-ben A, ha bármely $x_n \to \infty$ ($x_n \to -\infty$) esetén $f(x_n) \to A$.

Differenciálható függvény pontbeli deriváltjának definíciója:

Az $f :]a;b[\to R; x \mapsto f(x)$ függvény differenciálható az $x_0 \in]a;b[$ pontban, ha létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ határérték. Ezt a határértéket nevezzük az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának vagy deriváltjának. Jelölés: $f'(x_0)$; $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$. Megadja a grafikon ezen pontjához húzott érintő meredekségét. Használható: függvények vizsgálata, monotonitás.

Tételek:

- **Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van**.
  Bizonyítás: indirekt.
  Tfh. az $\{a_n\}$ konvergens sorozatnak két különböző határértéke van, legyen ez a és b, ahol $a \neq b$.
  A konvergencia definíciója alapján valamettől kezdve a sorozat minden tagja bele kell, hogy tartozzon az a és b $\dfrac{|b-a|}{2}$ sugarú környezetébe, amelyek diszjunktak. Ez ellentmondás, tehát bármely konvergens sorozatnak egy határértéke van.
- **Bármely konvergens sorozat korlátos** (*a korlátosság a konvergencia szükséges feltétele)*

- **Rendőr-elv**: legyen $a_n \to a$ és $c_n \to a$ két konvergens sorozat, és minden $n \in N^+$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$. Ekkor $b_n \to a$.
  Bizonyítás: rögzítünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot.
  Mivel $a_n \to a$, így létezik N_1, hogyha $n > N_1$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$.
  Mivel $c_n \to a$, így létezik N_2, hogyha $n > N_2$, akkor $|c_n - a| < \varepsilon$.
  Legyen $N = \max(N_1; N_2)$
  Ha $n > N$, akkor $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ és $-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$.
  Tudjuk, hogy minden $n \in N^+$ esetén $a_n \le b_n \le c_n$ ➔ $a_n - a \le b_n - a \le c_n - a$ ➔ (ha $n > N$) $-\varepsilon < a_n - a \le b_n - a \le c_n - a < \varepsilon$ ➔ $|b_n - a| < \varepsilon$.

Pár szó az integrálásról

F(x) a f(x) primitív függvénye (antideriváltja), ha $F'(x) = f(x)$. F(x) csak konstans erejéig van meghatározva!

Az f függvény antideriváltjainak (primitív függvényeinek) a halmazát az f függvény határozatlan integráljának nevezzük. Jelölés: $\int f(x)dx$.

Legyen h: alsó közelítő összegek felső határa (legkisebb felső korlátja), H : felső közelítő összegek alsó határa (legnagyobb alsó korlátja) .) Ha $h = H$, akkor mondjuk, hogy az f korlátos függvénynek létezik határozott integrálja az $[a;b]$-on, és ez a határozott integrál megegyezik azzal a számmal, amely az összes alsó összegnél nagyobb egyenlő, és az összes felső összegnél kisebb egyenlő. Jelölés: $\int_a^b f(x)dx$. /Riemann-féle integrál./

Pl.: $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

Alkalmazások:

- út → sebesség → gyorsulás
- harmonikus rezgőmozgás
- munkaszámítás
- erő-út összefüggés
- idő-út összefüggés határozott integrálra.
- szélsőérték problémák megoldása.