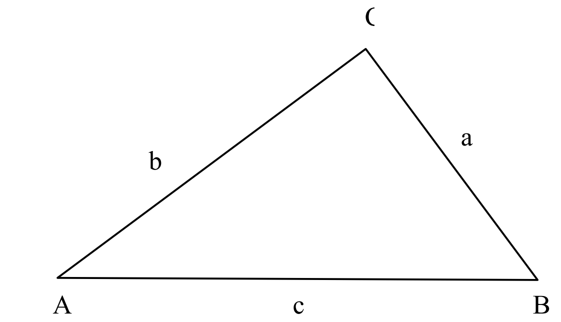
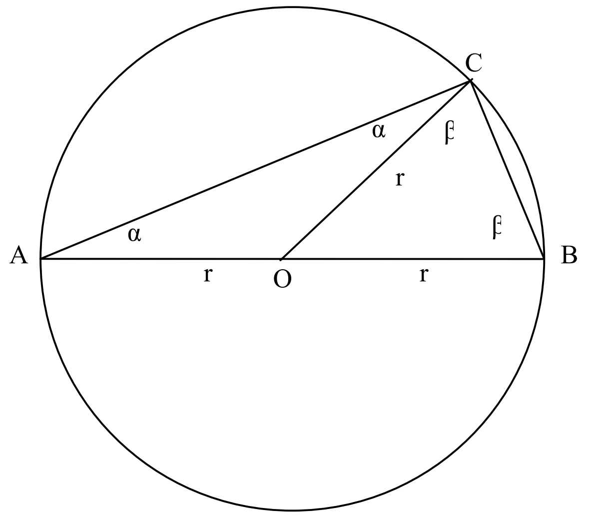
11.
Derékszögű háromszögek



a,b:befogók
c: átfogó

Thalesz-tétel: Ha egy kör tetszőleges átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor derékszögű háromszögek kapunk.

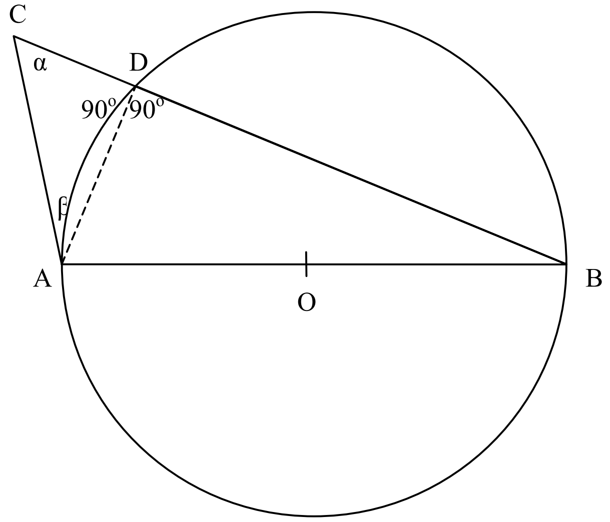


Bizonyítás:
Az OC sugár behúzásával egyenlő szárú háromszögek keletkeznek.

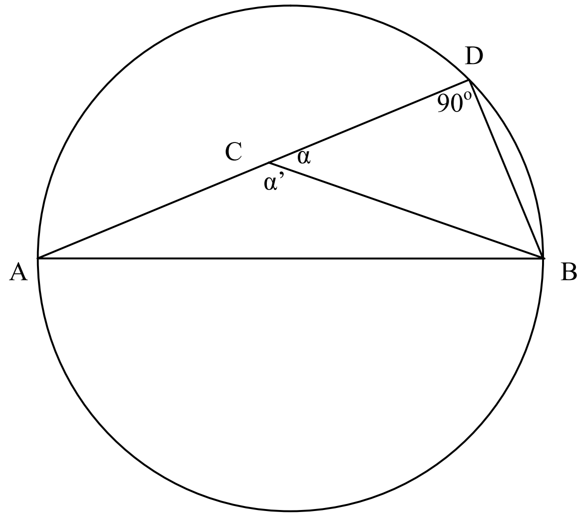
$2\alpha+2\beta=180^o$
$\alpha+\beta=90^o$

Thalesz tétel megfordítása: Ha az AB szakasz a C pontból derékszögben látszik, akkor C rajta van az AB, mint átmérő fölé emelt körön.
Bizonyítás:

Felhasználjuk a Thalesz-tételt! Belátjuk, hogy C nem lehet a körön kívül és a körön belül sem.



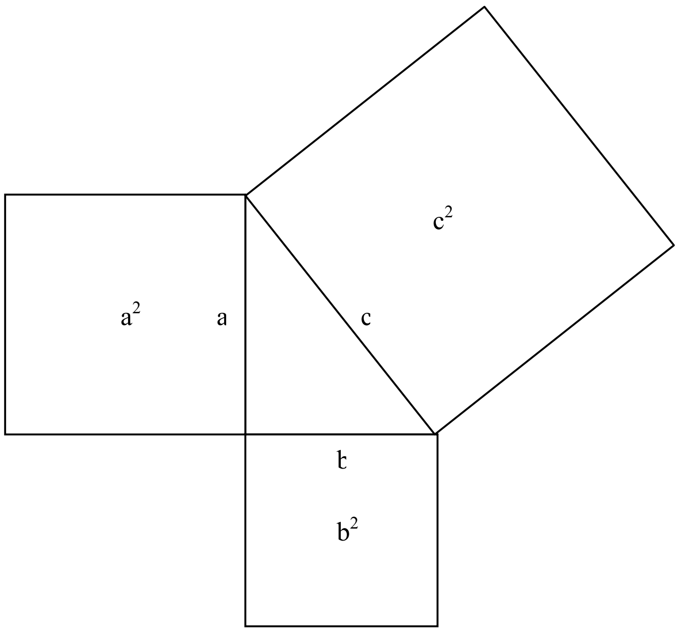
$\alpha+\beta=90^o$
$\alpha<90^o$

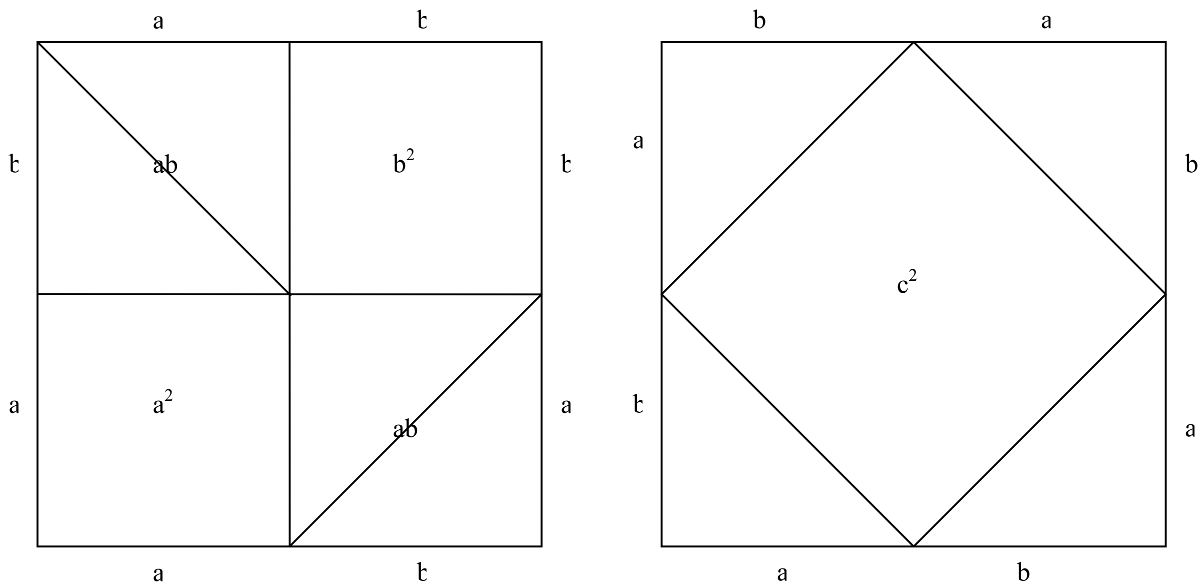


$\alpha < 90^o$, CBDΔ derékszögű
$\alpha' > 90^o$, mert α külső szöge

Thalesz-tétel és megfordítása együtt: Azon pontok halmaza a síkon, melyekből egy adott szakasz derékszögben látszik, a szakasz, mint átmérő fölé emelt körvonal pontjainak halmaza, kivéve a szakasz végpontjait.

Pitagorsz-tétel: A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével.





$$a^2+b^2+2ab=c^2+4\frac{ab}{2}$$

$$a^2+b^2=c^2$$

Pitagorasz-tétel megfordítása: Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

cosinus-tétel: $c^2=a^2+b^2+\underbrace{2ab\cos\gamma}_{=0}$

$\cos\gamma=0 \Rightarrow \gamma=90^{\circ}$

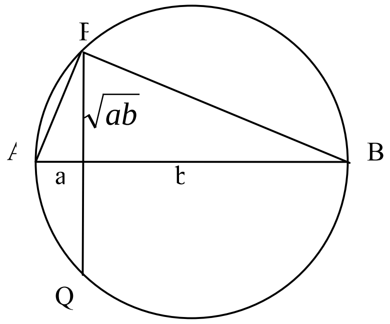
Mértani közép tételek:

magasságtétel: $m=\sqrt{xy}$

befogótétel: $a=\sqrt{xc}$ és $b=\sqrt{xc}$

Alkalmazások:

- $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (egyenlőség a=b esetén…)
- tető magassága
- szögszámítás, földmérés, területszámítás



PQ a kör húrja

$PQ=2\sqrt{ab}$ (magasságtétel)

a+b: a kör átmérője