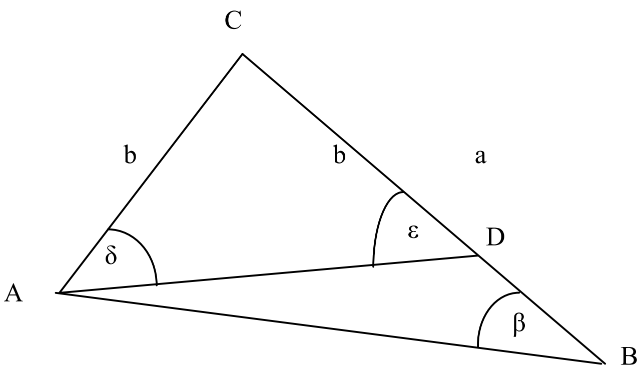
14. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

TÉTEL: Ha egy háromszögben van 2 egyenlő oldal, akkor az azokkal szemben fekvő szögek egyenlők és visszafelé is igaz

TÉTEL: Bármely háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.

Bizonyítás:

Legyen a>b. Állítás: α>β.
Mérjük fel BC oldalra a C pontból az AC oldalt. ADCΔ egyenlőszárú => δ = ε, ε az ABDΔ D csúcsánál lévő



külső szöge => ε>β=> β<ε = δ<α, azaz α>β.

TÉTEL: Cosinustétel

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$

Bizonyítás:

$\vec{CB} = \vec{a}, \vec{CA} = \vec{b} \quad \vec{AB} = \vec{c}$

felhasználhatjuk a vektorok skaláris szorzatáról tudottakat

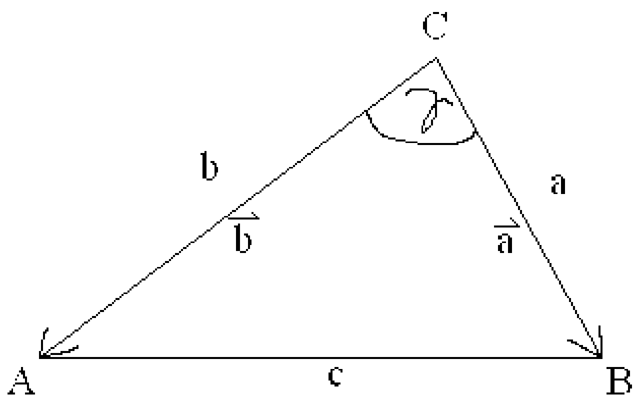
$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad / ()^2$

$\vec{c}^2 = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$

$c^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2 \cdot \vec{a}\vec{b}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$.



Következmények:

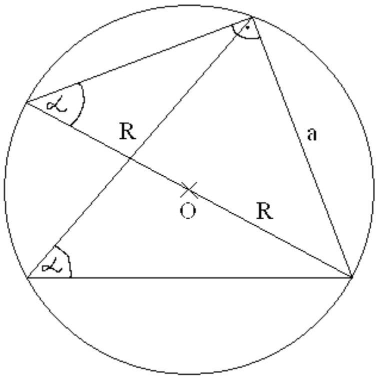
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\gamma = 90^\circ$ => $\cos\gamma = 0$ $\qquad$ $c^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ Pitagorasz-tétel

Ha a c a leghosszabb oldal, akkor annak a feltétele, hogy a háromszög hegyesszögű (γ hegyesszögű) ⇔ $a^2 + b^2 < c^2$

Tompaszögűre: $a^2 + b^2 > c^2$

TÉTEL: $a = 2R\sin\alpha$ (a másik két oldalra analóg módon.felírható)



TÉTEL: Sinustétel:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

1.bizonyítás:

$$t_\Delta = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$$

$$b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta$$

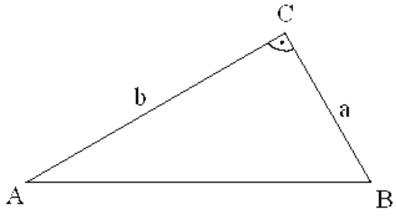
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

2. bizonyítás: a fent szereplő segédtétel alapján!

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{2}\cancel{R}\cdot\sin\alpha}{\cancel{2}\cancel{R}\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

TÉTEL.: Trigonometrikus területképlet

$$t_\Delta = \frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}$$



1. $\gamma = 90^\circ$

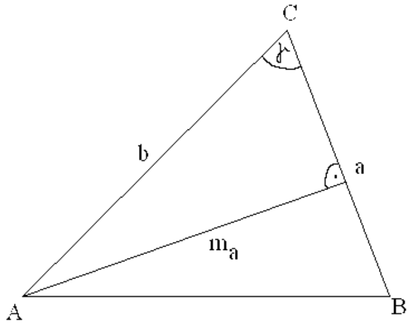
   $$t = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{a\cdot b\cdot\sin 90^\circ}{2}$$

2. $0^\circ < \gamma < 90^\circ$

   $$\sin\gamma = \frac{m_a}{b}$$

$$b \cdot \sin\gamma = m_a$$

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

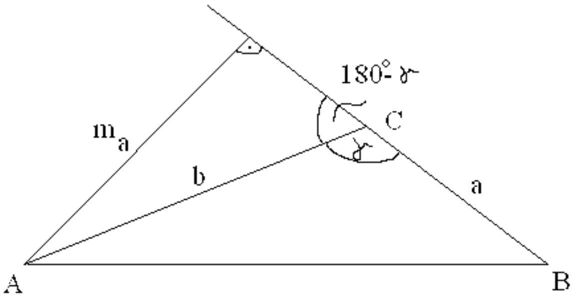


3. $90^\circ < \gamma < 180^\circ$

$$\frac{m_a}{b} = \sin\left(180^\circ - \gamma\right) = \sin\gamma$$

$$m_a = b \cdot \sin\gamma$$

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$



<u>Alkalmazások</u>:

cosinustétel: a 3 oldal ismeretében szögkiszámítás

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Pitagorasz-tétel és megfordítása

$\left|\vec{F}_1\right|$ és $\left|\vec{F}_2\right|$ valamint γ ismert

$\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = ?$

A négyzet oldala és átlója hosszának aránya: $\sqrt{2}$