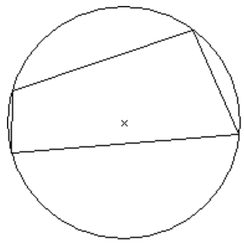
15. Húrnégyszög, érintőnégyszög, szimmetrikus négyszögek

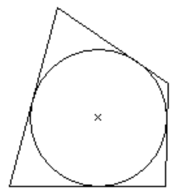
Def.:

húrnégyszög:
Az olyan négyszöget, mely köré a 4 csúcsra illeszkedő kör rajzolható, húrnégyszögnek nevezzük.
Minden szöge konvex.

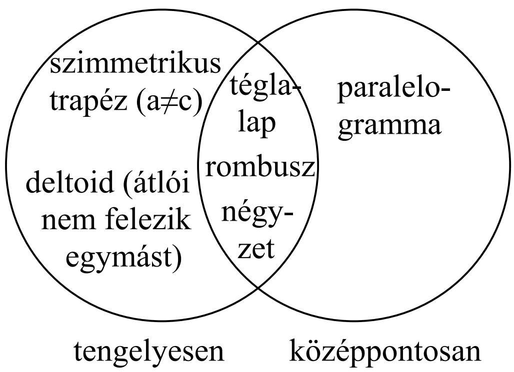


érintőnégyszög:
Az olyan négyszöget, amelybe minden oldalt érintő kör rajzolható, érintőnégyszögnek nevezzük.

Minden szöge konvex.



szimmetrikus négyszög:



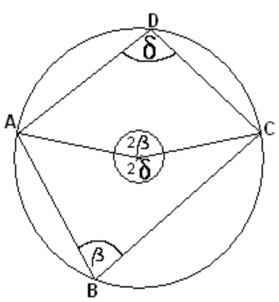
tengelyes szimmetria → szemközti csúcsokra illeszkedő tengely

tengelyes szimmetria → szemközti oldalak közös felezőmerőlegese

maximum 4 szimmetriatengelye van (négyzet)

Tételek:

A húrnégyszögek tétele:
Körbe írt négyszög szemközti szögeinek összege 180^O.



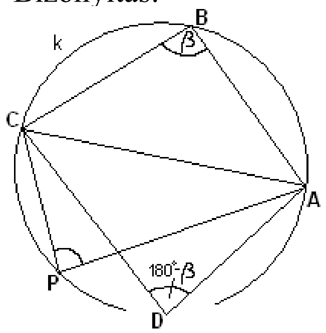
A kerületi és középponti szögek tétele miatt:

$AOC\sphericalangle_1=2\beta$
$AOC\sphericalangle_2=2\delta$
$360^O=2\delta+2\beta \iff 180^O=\delta+\beta$

A húrnégyszögek tételének megfordítása:

Ha egy négyszög 2 szemközti szögének az összege 180^{O}, akkor a négyszögnek van köré írható köre.

Bizonyítás:



k: ABC háromszög köré írt köre
kellene: $D \in k$

ABCP húrnégyszög => $P\measuredangle = 180^{O} - \beta$
(húrnégyszögek tétele miatt)

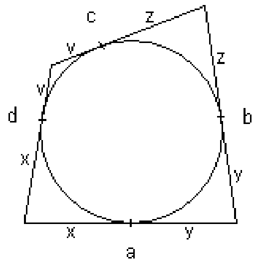
A kerületi szögek tételének megfordítása miatt, mivel $P\measuredangle = D\measuredangle = 180^{O} - \beta$, így $D \in k$

Ptolemaios-tétel: átlók szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatának összegével.

Az érintőnégyszögek tétele:

Ha egy négyszög érintőnégyszög, akkor 2-2 szemközti oldalának összege egyenlő.

Bizonyítás:



$a+c=b+d$

Külső pontból húzottérintő szakaszok hossza egyenlő.

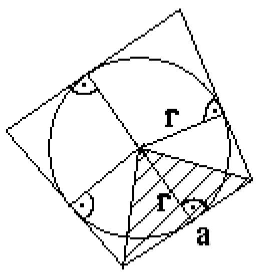
$x+y+z+v$ mindkét oldalon.

Az érintőnégyszögek tételének megfordítása:

Ha egy <u>konvex</u> négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor ő érintőnégyszög (azaz van beírt köre).

<u>Alkalmazások:</u>

$T = rs$ (s a kerület fele)



Feuerbach-féle körre vonatkozó tétel.

Papírsárkány, díszítések.

Adott oldalak mellett a húrnégyszög területe a maximális.