19. Vektorok

A vektor definíciója: irányított szakasz

A fizika fogalomalkotása

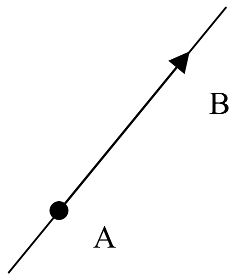
- Hossz: $\overline{AB}$
- Állás: AB egyenes helyzete
- Irány: kezdő és végpont jelölése

2 vektor egyenlő, ha a fenti 3 tulajdonság megegyezik

Speciális eset A=B: nullvektor $\vec{0}$

Állása, irányítása határozatlan

Hossza: 0

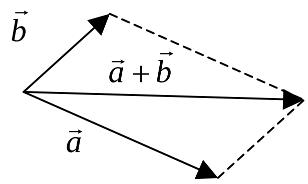


Vektorműveletek:

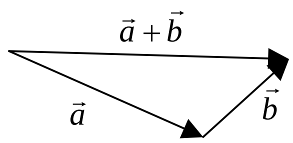
- Összeadás:

  $\vec{a}+\vec{b}$: vektor

  1. definíció: paralelogramma-módszer



  2. definíció: egymáshoz fűzés

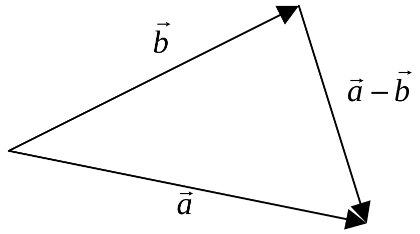


  Tulajdonságai:

  - $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kommutatív
  - $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ asszociatív
  - $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

- Kivonás:

  $\vec{a}-\vec{b}$: vektor



Tulajdonságai:

- $\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}$
- $\vec{a} - \vec{0} = \vec{a}$
- $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{a} - \vec{b})$ antikommutatív

– Számmal való szorzás

$\vec{a}$, $\lambda \in \mathrm{R}$ $\qquad$ $\lambda\vec{a}$: vektor

Hossza: $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Állás: $\lambda\vec{a}$ és $\vec{a}$ állása ugyanaz

Irányítás: $\lambda>0$: ugyanaz

$\lambda<0$: ellentétes

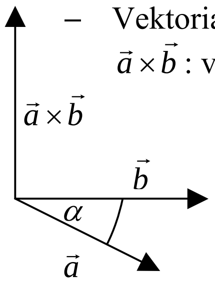
$\lambda=0$: $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

Tulajdonságok:

- $\lambda\vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$ kommutatív
- $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \mu \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$

– Vektoriális szorzat:

$\vec{a} \times \vec{b}$: vektor



$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ és $\vec{b}$ síkjára

$\vec{a} \times \vec{b}$: felőle visszanézve $\vec{a}$-t a $\vec{b}$-ba pozitív forgás viszi (jobbrendszer)

Tulajdonságai:

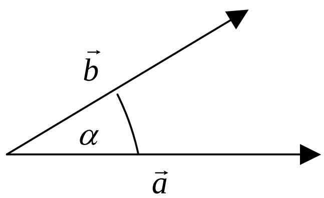
- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$ antikommutatív
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ disztributív

Mire jó? Területszámítás, térfogatszámítás, fizikai alkalmazások.

– Skaláris szorzat:

$\vec{a} \cdot \vec{b} \in \Re$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$



Tulajdonságai:

$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \cdot \vec{0} = |\vec{a}| \cdot \underbrace{|\vec{0}|}_{0} \cdot \cos\alpha = 0$

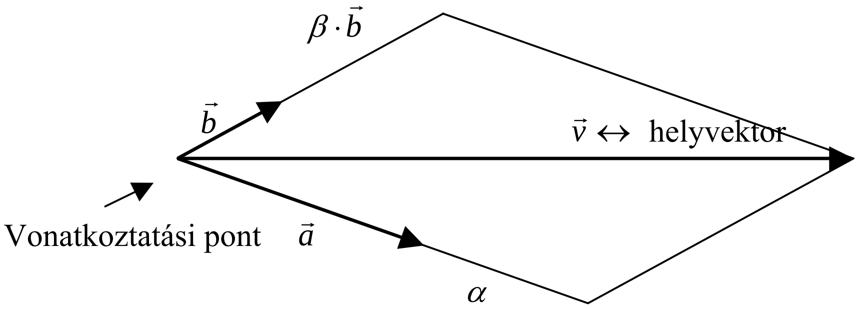
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ kommutatív

$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

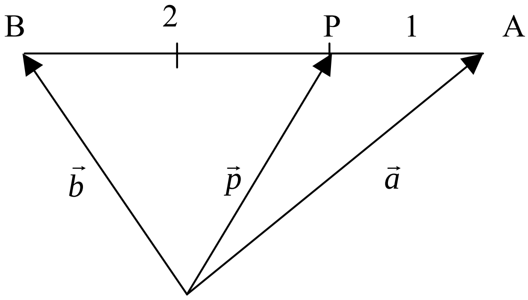
$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ disztributív

<u>TÉTELEK:</u>

- $\vec{a}$ nem párhuzamos $\vec{b}$ esetén az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ síkjában lévő bármely $\vec{v}$ előállítható méghozzá egyértelmű módon $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ alakban.



- Osztópontba mutató helyvektor:



$$\vec{p} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

Biz.:

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\vec{p} = \vec{b} - \overrightarrow{BP} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

- Skaláris szorzatra

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Biz.: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

„$\Rightarrow$” $\alpha = 90^\circ$, akkor $\cos 90^\circ = 0$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

„$\Leftarrow$” $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, akkor

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{c}|\vec{a}| = 0\\ \Updownarrow\\ \vec{a} = \vec{0}\end{array}\quad \text{vagy}\quad \begin{array}{c}|\vec{b}| = 0\\ \Updownarrow\\ \vec{b} = \vec{0}\end{array}}_{\text{Bármire } \perp}\quad \text{vagy}\quad \begin{array}{c}\cos\alpha = 0\\ \\ \alpha = 90^\circ\end{array}}_{\vec{a} \perp \vec{b}}$$

<u>Alkalmazások:</u>

- Fizika
- Koordinátageometria (egyenes egyenlete, szakasz hossza, stb.)
- Cosinustétel bizonyítása
- Területszámítás (vektoriális szorzat)