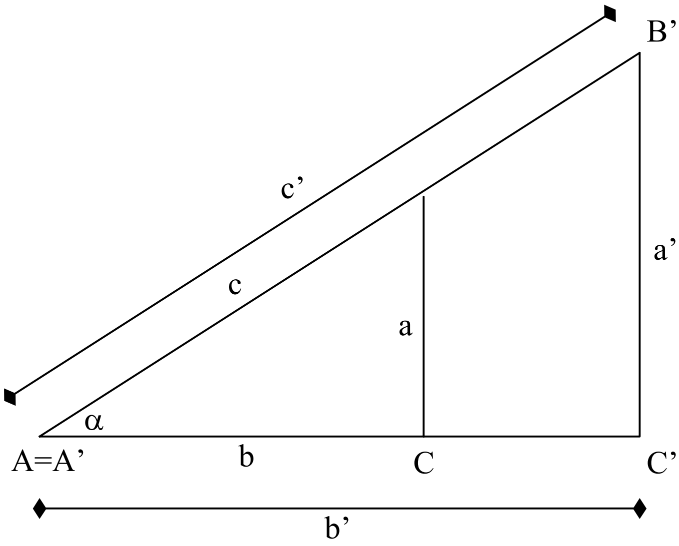
22. Szögfüggvények és alkalmazásaik a geometriában



1. Hegyesszögekhez rendelt nevezetes arányok:

$ABC_\Delta \sim A'B'C'_\Delta$ (szögek egyezése)

Mivel bármely két α szögű derékszögű háromszög hasonló, így α egyértelműen megadja bármely két oldal arányát.

DEF.:

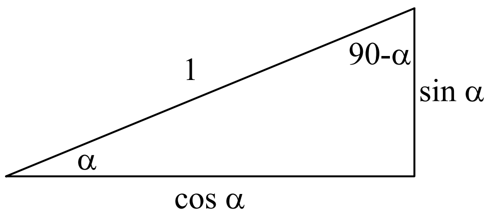
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$$

$$ctg\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

Nevezetes összefüggések (KÖVETKEZMÉNYEK!)



$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\text{tg}(90-\alpha) = \text{ctg}\,\alpha$$

$$\text{ctg}(90-\alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

TÉTEL:

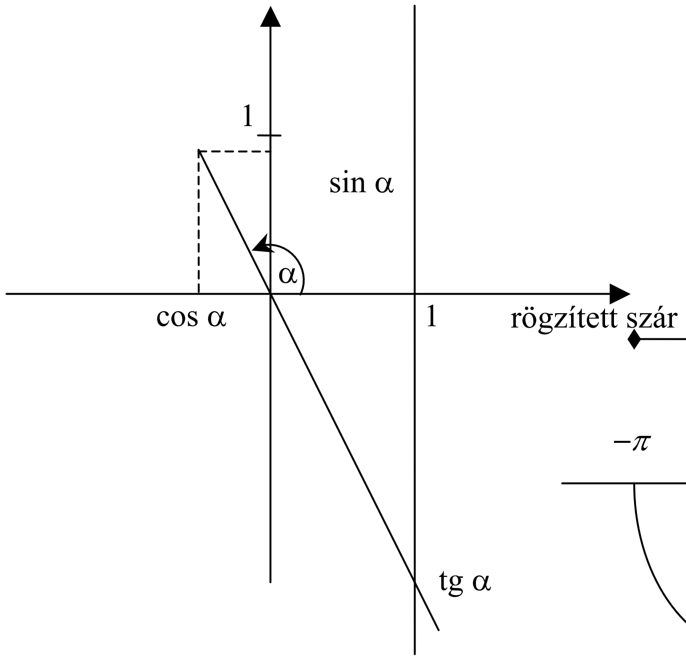
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorasz-tétel)

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

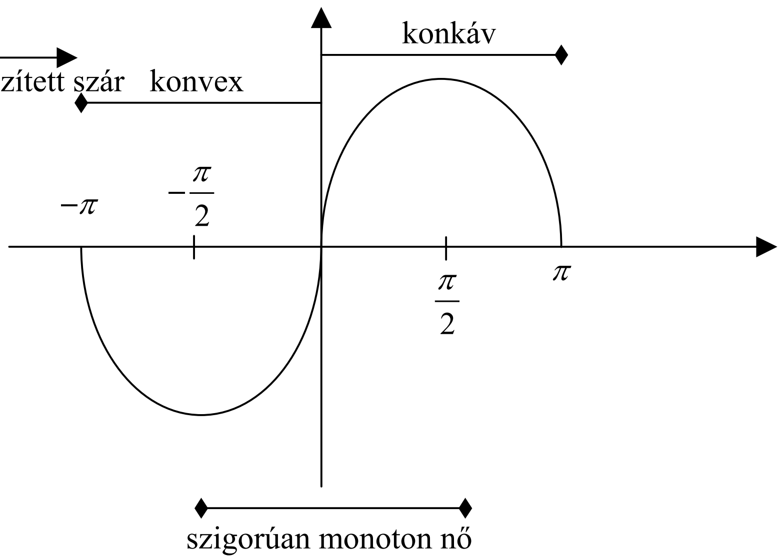
$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

2. Általánosítás tetszőlege szögekre (forgásszögekre):



Pitagorasz-tétel miatt:
$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

3. A szögfüggvények nevezetes tulajdonságai:



Sin: $x \mapsto \sin x,\ x \in \mathbb{R}$ (x radián)
$-1 \leq \sin x \leq 1$

Zérus hely: $x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Geometriai alkalmazások:

- geometria nevezetes tételei
- cosinus-tétel
- $a = 2R \cdot \sin\alpha$
- sinus-tétel $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- trigonometrikus területképlet: $T_\Delta = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$

  (négyszögre: $T_\square = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$)
- addíciós képletek