24. Kombinatorika, a valószínűségszámítás elemei

1.Kombinatorika

A véges halmazokkal foglalkozó tudományterület.
Idő hiányában csak a nevezetes összeszámolásokkal foglalkozunk.

a) Sorbaállítások (permutációk)

alapfeladat: n különböző dolgot (valamely halmaz elemeit) hányféleképpen rakhatunk sorba?

TÉTEL: n! ismétlés nélküli permutáció: P_n

bizonyítás: teljes indukcióval

n=1-re 1=1!

n=2-re $2 = 2 \cdot 1 = 2!$ két különböző elemet kétféleképpen rakhatunk sorba, például a,b és b,a

Tegyük fel, hogy n=k-ra igaz az állítás, azaz k különböző elem permutációinak száma k!, ahol $k > 2$ egész.

Bizonyítsuk be, hogy n=k+1-re is igaz!

Válasszuk ki k elem egy permutációját. A (k+1)-edik elemet k+1 helyre helyezhetjük el, így k+1 db permutációt kapunk. Mivel k elemnek k! permutációja volt és mindegyikből k+1 db lett, ezért $(k+1)k!$ permutációt kapunk.

$(k+1)k! = (k+1)!$ →az állítás igaz

változat: n dolog, melyek k-félék, és az egyes osztályokba tartozók nem megkülönböztethetőek:

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \quad (1 \le k \le n)$

hányféleképpen rakhatók sorba?

TÉTEL: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$, ismétléses permutáció: $P_n^{n_1;n_2;\ldots;n_k}$

bizonyítás: visszavezetés az alapfeladatra

speciális eset: $k > 2$, $n = i + n - i$, $\dfrac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = \binom{n}{i}$

DEF: n különböző elem egy sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük, ahol $n \in N^+$

b) Variációk:

DEF: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy mindet elemet legfeljebb egyszer választunk ki és számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor n elem egy k-ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. ($n, k \in N^+$ és $k \le n$)

alapfeladat: n különböző dologból kiválasztva k dolgot, hányféleképpen rakhatók sorba?

TÉTEL: $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ ismétlés nélküli variáció: V_n^k

bizonyítás:

Az 1. elemet n-féleképpen választhatjuk ki,
a 2. elemet (n-1)-féleképpen választhatjuk ki,
a 3. elemet (n-2)-féleképpen választhatjuk ki,
…
a k. elemet n-(k-1)-féleképpen választhatjuk ki

$V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

bővítve $(n-k)!$-sal:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

változat: a különböző dologból visszatevéssel kiválasztunk k db-ot, ez hányféleképpen lehetséges?

TÉTEL: n^k ismétléses variáció: V_n^{ki}

c) Kombinációk

DEF: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy minden elemet legfeljebb egyszer választunk ki, és nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk. ($n,k \in N^+$ és $k \leq n$)

alapfeladat: n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma (k db elem kiválasztása, ha a sorrend nem számít)

TÉTEL: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ismétlés nélküli kombináció: $C_n^k = \binom{n}{k}$

bizonyítás:

$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ figyelembe veszi a sorrendet

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

TÉTEL: binomiális tétel, ismétléses kombináció: $C_n^{ki} = \binom{n+k-1}{k}$

(ismétléses kombináció: többször is választhatjuk azt az elemet, amelyet már kihúztunk)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

A binomiális tétel bizonyítása: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n\ db\ tényező}$

A szorzást a következőképpen végezzük:

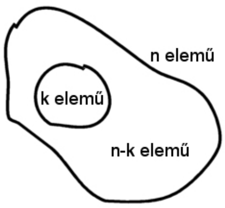
- a^n-es tagot úgy kapunk, ha n db tényezőből választunk a-t és 0 db tényezőből *b*-t.
  Ez $\binom{n}{0}$-féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{0}\cdot a^n$ lesz.
- $a^{n-1}\cdot b$-s tagot úgy kapunk, ha n-1 db tényezőből választunk a-t és 1 db tényezőből *b*-t. Ez $\binom{n}{2}$-féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b$-s lesz
- $a^{n-2}\cdot b^2$-es tagot úgy kapunk, ha *n-2* db tényezőből választunk *a*-t és 2 db tényezőből *b*-t.
  Ez $\binom{n}{2}$-féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2$ lesz.
- $a\cdot b^{n-1}$-es tagot úgy kapunk, ha 1 db tényezőből választunk *a*-t és *n-1* db tényezőből b-t.
  Ez $\binom{n}{n-1}$-féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{n-1}\cdot a\cdot b^{n-1}$ lesz.
- b^n-es tagot úgy kapunk, ha 0 db tényezőből választunk *a*-t és *n* db tényezőből *b*-t.

Ez $\binom{n}{n}$-féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{n}\cdot b^n$ lesz.

Ezeket összeadva→állítás.

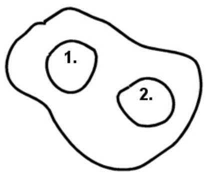
Fontos összefüggések:

1. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$



2. $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$

bizonyítás:



1. $\binom{n-1}{k}$-féle

2. $\binom{n-1}{k-1}$-féle

Pascal-háromszög:

				1						0. *sor*
			1		1					1. *sor*
		1		2		1				2. *sor*
	1		3		3		1			3. *sor*
1		4		6		4		1		4. *sor*

$\binom{n}{0}\quad\binom{n}{1}\quad\binom{n}{2}\qquad\binom{n}{k}\qquad\binom{n}{n}$

TÉTEL: $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$

2^n: az összes részhalmazok száma

bizonyítás: lásd a halmazoknál

2.Valószínűségszámítás elemei

klasszikus képlet (Laplace):

$$p = \frac{\textit{kedvező kimenetelek (esetek)}}{\textit{összeskimenetelek (esetek)}}$$

<u>alapfogalmak</u>: véges sok lehetséges kimenetel esetén
elemi események: az összes lehetséges kimenetelek
például:
2 érme esetén a valóságot az a modell írja le helyesen, ahol 4 elemi esemény van
f-f, í-í, f-í, í-f (megkülönböztetjük az érméket)
<u>A valószínűségszámítás szemléletes fogalma</u>:
n: hányszor végezzük el a kísérletet
k: gyakoriság: egy adott kimenetel hányszor következik be
$\frac{k}{n}$: relatív gyakoriság: ha n kísérlet esetén valamely kísérlet k-szor következik be
Ha $\frac{k}{n}$ n növelésével egy adott szám körül ingadozik úgy, hogy az ingadozás stabilitás mutat, akkor ez a szám az adott esemény valószínűsége. (esemény: valahány elemi esemény adja meg)

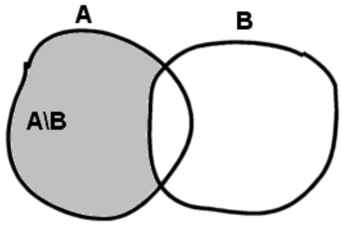
<u>eseménytér</u>: az összes elemi események halmaza

<u>A valószínűség matematikai fogalma</u>:
P egy függvény, ami az eseménytéren értelmezett és kielégíti a következő axiómákat: (Kolmogorov-axiómák)

1. $1 \geq p \geq 0$
2. $p(\textit{biztos esemény}) = 1$
3. $\textit{A és B egymást kizárók} : A \cap B = 0$
   $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

<u>Fontos eredmények</u>:
a) $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
   $p(\overline{A})$: komplementer esemény, p(lehetetlen esemény)=0
b) $A \subset B$ esetén $p(A) \leq p(B)$

c)



$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$

Ha véges sok lehetséges kimenetel mindegyike egyenértékű, akkor lesz a klasszikus képlet használható

$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} p(A_i) = k \cdot p(A_i) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} =$$

$$= \frac{kedvező\ esetek\ száma}{összes\ esetek\ száma}$$

teljes eseményrendszer: egymást páronként kizáró események, melyek valószínűségének összege: 1

$$\sum_{i=1}^{k} p(A_i) = 1$$

eloszlás: $\begin{Bmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \\ p(A_1), & p(A_2), & \ldots, & p(A_n), \end{Bmatrix}$ (binomiális eloszlás, geometriai eloszlás)

(valószínűségi változó)

Alkalmazások:

- lottó, totó, szerencsejáték
- geometriai valószínűségek: π becslése (Buffon-féle tűprobléma)
- mintavétel, közvélemény-kutatás, minőség-ellenőrzés
- a nyeremény igazságos szétosztása félbeszakadt játék esetén
- kinetikus gázelmélet (fizika)
- domináns-recesszív örökléselmélet (biológia)