

**ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2013. május 7.**

# **MATEMATIKA**

## **EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA**

## **JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ**

**EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA**

---

---

## Fontos tudnivalók

### Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölve a hibákat és a hiányokat.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a **javító által adott pontszám** a mellette levő téglalapba kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül a **ceruzával írt részeket** a javító tanár nem értékelheti.

### Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változik meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban **zárójelben szerepel** egy megjegyzés vagy mértékegység, akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
6. Egy feladatra adott **többféle megoldási próbálkozás** közül csak egy, a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrésztre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
9. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

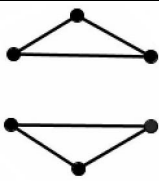
I.


<b>1.</b>		
Egy tört nempozitív, ha vagy a számlálója és nevezője ellentétes előjelű, vagy a számlálója nulla, de a nevezője nem.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Első eset: $x - 3 > 0$ és $x + 4 \leq 0$ . Ebből: $x > 3$ és $x \leq -4$ . Ebben az esetben nem kapunk megoldást.	1 pont	
Második eset: $x - 3 < 0$ és $x + 4 \geq 0$ . Ebből: $x < 3$ és $x \geq -4$ .	1 pont	
Ezért az $A$ halmaz elemei: $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ .	1 pont	
Ez az abszolútértékes egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4 < x + 3 < 4$ ,	2 pont	
azaz $-7 < x < 1$ .	1 pont	
Ezért a $B$ halmaz elemei: $\{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$ .	1 pont	
$A \cap B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$ .	1 pont	
$A \setminus B = \{1; 2\}$ .	1 pont	
$A \cup B = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>11 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó az egyenlőtlenségeknek egész helyett a valós megoldásaival dolgozik, akkor legfeljebb 8 pontot kaphat.*

<b>2.</b>		
<p>Jó ábra.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen modellezi és számolja ki a hajtósíj hosszát.</i>
A keresett hajtósíjhossz az egymással egyenlő hosszú $E_1E_2$ és $E_3E_4$ érintőszakaszokból, valamint a (rövidebb) $E_1E_3$ körívből és a (hosszabb) $E_2E_4$ körívből áll.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
Az $O_1$ -en keresztül az $E_1E_2$ érintőszakasszal húzott párhuzamos metszéspontja $O_2E_2$ -vel legyen $M$ .	1 pont	
Az $O_1MO_2$ derékszögű háromszögből $E_1E_2 = O_1M = \sqrt{46^2 - 19^2} = \sqrt{1755} \approx 41,9$ (cm).	1 pont	
(Az $O_1O_2M$ szöget $\alpha$ -val jelölve:) $\cos \alpha = \frac{19}{46}$ ( $\approx 0,4130$ ),	1 pont	

ahonnan $\alpha \approx 65,6^\circ$ .	1 pont	
A hosszabb $E_2E_4$ körívhez tartozó középponti szög $360^\circ - 2\alpha \approx 228,8^\circ$ .	1 pont	
A hosszabb $E_2E_4$ körív hossza így $\frac{228,8^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 20\pi \approx$	1 pont	
$\approx 79,9$ (cm).	1 pont	
A rövidebb $E_1E_3$ körívhez tartozó középponti szög $2\alpha \approx 131,2^\circ$ .	1 pont	
A rövidebb $E_1E_3$ körív hossza így $\frac{131,2^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 1\pi \approx$	1 pont	
$\approx 2,3$ (cm).	1 pont	
Innen a feszes hajtósíj hossza megközelítőleg $2 \cdot 41,9 + 79,9 + 2,3 = 166$ cm.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>13 pont</b>	

<b>3. a)</b>		
Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen jó ellenpélda (nem összefüggő, egyszerű gráf, amelyben minden pont fokszáma legalább 2), például:		1 pont
<b>Összesen:</b>	<b>2 pont</b>	

<b>3. b)</b>		
Az állítás megfordítása: <i>Ha a gráf összefüggő, akkor minden pontjának fokszáma legalább 2.</i>	2 pont	
Az állítás hamis.	1 pont	
Bármilyen jó ellenpélda (összefüggő, egyszerű gráf, amelynek van elsőfokú pontja), például:		1 pont
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3. c)</b>		
	1-1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>3. d)</b>		
Bármilyen jó 6 pontú fa, például:		2 pont
Az 5-ös sorszám elhelyezése a $(P \cap Q) \setminus R$ halmazba.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>4. a) első megoldás</b>		
A március 1-jén felvett hitel ( $365 - 31 - 28 =$ ) 306 napig, az október 1-jén felvett hitel pedig ( $31 + 30 + 31 =$ ) 92 napig kamatozik.	1 pont	
A napi kamatláb $\frac{8}{365}$ %.	1 pont	
Az első hitel kamata $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 306$ ( $\approx 2683$ ) (Ft),	1 pont	
a második hitel kamata pedig $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92$ ( $\approx 807$ ) (Ft).	1 pont	
Összesen ( $2683 + 807 =$ ) 3490 Ft kamatot tőkésít a bank december 31-én.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>4. a) második megoldás</b>		
Március 1-től szeptember 30-ig, azaz (31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 =) 214 napig 40 000 Ft hitel után, október 1-től december 31-ig, azaz (31 + 30 + 31 =) 92 napig pedig 80 000 Ft hitel után számít fel a bank kamatot.	1 pont	
A napi kamatláb $\frac{8}{365}$ %.	1 pont	
Az első periódusban $40\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 214 (\approx 1876)$ (Ft),	1 pont	
a második periódusban pedig $80\,000 \cdot \frac{8}{365 \cdot 100} \cdot 92 (\approx 1613)$ (Ft) kamatot számít fel a bank.	1 pont	
Összesen (1876 + 1613 =) 3489 Ft kamatot tőkésít a bank december 31-én.	1 pont	<i>3490 Ft is elfogadható (az eltérés a kerekítések- ből adódik).</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

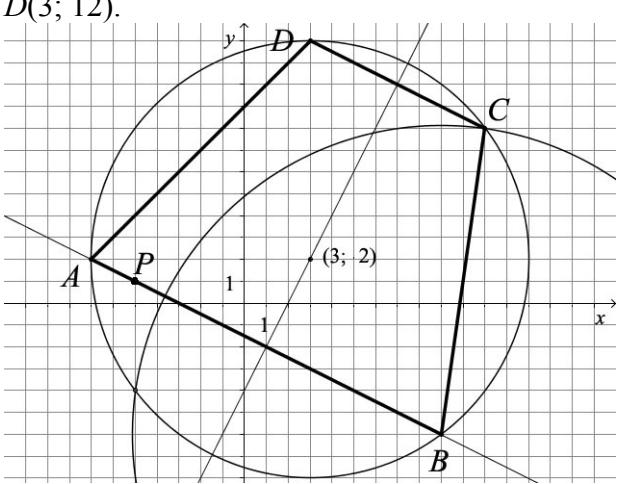
*Megjegyzés: Más, ésszerű és helyes kerekítésekkel – például ha a vizsgázó a napi kamatlábat 0,02%-nak vagy 0,022%-nak veszi – kapott eredmények is elfogadhatók. Rossz vagy ésszerűtlen kerekítés(ek) esetén a vizsgázó ezért összesen 1 pontot veszítsen.*

<b>4. b)</b>		
(Ha $x$ Ft volt az évi törlesztőrészlet, akkor) $(\dots((1\,000\,000 \cdot \underbrace{1,08 - x}_{10\text{-szer}}) \cdot 1,08 - x) \cdot \dots) \cdot 1,08 - x = 0$ .	2 pont	
Rendezve: $1\,000\,000 \cdot 1,08^{10} - x \cdot (1,08^9 + 1,08^8 + \dots + 1) = 0$ .	2 pont	
A zárójelben egy mértani sorozat első 10 tagjának összege van ( $a_1 = 1, q = 1,08$ ).	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a meg- oldásból derül ki.</i>
$S_{10} = \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} (\approx 14,487)$	1 pont	
Az egyenletből: $x = \frac{1\,000\,000 \cdot 1,08^{10}}{S_{10}} \approx \left( \frac{2\,158\,925}{14,487} \approx \right)$	1 pont	
$\approx 149\,025$ .	1 pont	
Tehát (ezrekre kerekítve) 149 000 Ft az éves törlesztőrészlet.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>9 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a függvénytáblázatban található megfelelő képletbe jól helyettesít és így határozza meg az éves törlesztőrészletet, akkor maximális pontszámot kapjon.*

## II.

<b>5. első megoldás</b>		
(A szimmetriatengely egy normálvektora a $(2; -1)$ vektor, így) a trapéz alapjának egy normálvektora az $(1; 2)$ vektor.	1 pont	
A $P(-5; 1)$ ponton áthaladó $AB$ alap egyenesének egyenlete $x + 2y = -3$ .	1 pont	
Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait, tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az $\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 100 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	
Az $x = -2y - 3$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2 + 4y - 12 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont	
Ennek megoldásai $y = 2$ és $y = -6$ , így a trapéz $AB$ alapjának két végpontja $A(-7; 2)$ és $B(9; -6)$ .	1 pont	
A $B$ középpontú és $10\sqrt{2}$ sugarú kör egyenlete $(x-9)^2 + (y+6)^2 = 200$ .	1 pont	
Ennek és a trapéz köré írható körnek (az egyik) metszéspontját, tehát a $C$ csúcs koordinátáit az $\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 100 \\ (x-9)^2 + (y+6)^2 &= 200 \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszer (valamelyik) megoldása adja.	1 pont*	
A műveletek elvégzése és a két egyenlet kivonása után $x$ -et kifejezve $y$ -nal: $x = \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}$	2 pont*	$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$
Ezt visszahelyettesítve valamelyik kör egyenletébe, majd egyszerűsítve az $y^2 - 4y - 32 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.	1 pont*	$x^2 - 6x - 55 = 0$
Ennek megoldásai $y = 8$ és $y = -4$ , így a metszéspontok koordinátái $(11; 8)$ és $(-5; -4)$ .	1 pont*	$x = 11 \text{ és } x = -5$
(A $(-5; -4)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének $B$ -vel ellentétes oldalán van, így nem lehet a $BC$ szár másik végpontja, tehát) $C(11; 8)$ .	1 pont	
A $CD$ alap egyik normálvektora szintén az $(1; 2)$ vektor, valamint áthalad a $C(11; 8)$ csúcson, így egyenlete $x + 2y = 27$ .	1 pont	
Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait az $\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 100 \\ x + 2y &= 27 \end{aligned} \right\}$ egyenletrendszer megoldásai adják.	1 pont	

<p>Az <math>x = 27 - 2y</math> kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az <math>y^2 - 20y + 96 = 0</math> másodfokú egyenletet kapjuk.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Ennek megoldásai <math>y = 12</math> és <math>y = 8</math>. A <math>(11; 8)</math> pontot már korábban megkaptuk, így a negyedik csúcs <math>D(3; 12)</math>.</p> 	<p>1 pont</p>	
<p><b>Összesen: 16 pont</b></p>		

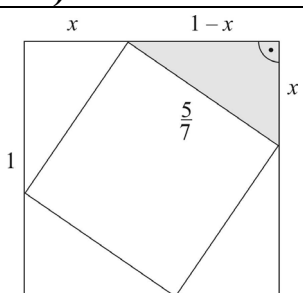
Megjegyzés: A \*-gal jelölt 5 pont akkor is jár, ha a vizsgázó az A középpontú és  $10\sqrt{2}$  sugarú kör felírásával és így a 
$$\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 100 \\ (x+7)^2 + (y-2)^2 &= 200 \end{aligned} \right\} \text{ egyenletrendszer megoldásával először a D csúcs koordinátáit határozza meg.}$$

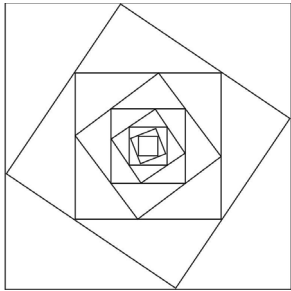
<p><b>5. második megoldás</b></p>		
<p>(A szimmetriatengely egy normálvektora a <math>(2; -1)</math> vektor, így) a trapéz alapjának egy normálvektora az <math>(1; 2)</math> vektor.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>A <math>P(-5; 1)</math> ponton áthaladó <math>AB</math> alap egyenlete <math>x + 2y = -3</math>.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait, tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az <math display="block">\left. \begin{aligned} (x-3)^2 + (y-2)^2 &amp;= 100 \\ x + 2y &amp;= -3 \end{aligned} \right\}</math> egyenletrendszer megoldásai adják.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Az <math>x = -2y - 3</math> kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az <math>y^2 + 4y - 12 = 0</math> másodfokú egyenletet kapjuk.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Ennek megoldásai <math>y = 2</math> és <math>y = -6</math>, így a trapéz <math>AB</math> alapjának két végpontja <math>A(-7; 2)</math> és <math>B(9; -6)</math>.</p>	<p>1 pont</p>	
<p>Jelölje a trapéz köré írt kör középpontját <math>K</math>. Mivel a kör sugara 10 egység, a trapéz szárai pedig <math>10\sqrt{2}</math> egység hosszúak, (a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt) az <math>AKD</math> és a <math>CKB</math> háromszögek derékszögűek.</p>	<p>2 pont</p>	



Ezért a $\overrightarrow{KA}(-10; 0)$ vektor $90^\circ$ -os elforgatottja a $\overrightarrow{KD}$ vektor, a $\overrightarrow{KB}(6; -8)$ vektor $90^\circ$ -os elforgatottja pedig a $\overrightarrow{KC}$ vektor.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Ezért vagy $\overrightarrow{KD}(0; 10)$ vagy $\overrightarrow{KD}(0; -10)$ ,	2 pont	
azaz vagy $D(3; 12)$ vagy $D(3; -8)$ .	1 pont	
(A $(3; -8)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének $A$ -val ellentétes oldalán van, így nem lehet az $AD$ szár másik végpontja, tehát) $D(3; 12)$ .	1 pont	
Hasonlóan vagy $\overrightarrow{KC}(8; 6)$ vagy $\overrightarrow{KC}(-8; -6)$ ,	2 pont	
azaz vagy $C(11; 8)$ vagy $C(-5; -4)$ .	1 pont	
(A $(-5; -4)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének $B$ -vel ellentétes oldalán van, így nem lehet a $BC$ szár másik végpontja, tehát) $C(11; 8)$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>16 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó a  $\overrightarrow{KA}$  és  $\overrightarrow{KB}$  vektorok két-két lehetséges  $90^\circ$ -os elforgatottja közül csak az egyik lehetőséggel foglalkozik, akkor ezért összesen 2 pontot veszítsen.*

<b>6. a)</b>		
	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A belső négyzet oldala $\frac{5}{7}$ méter.	1 pont	
A belső négyzet a külső négyzet oldalait $x$ és $1 - x$ hosszú szakaszokra bontja.	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
(A $90^\circ$ -os forgásszimmetria miatt) ez a felosztás mind a négy oldalon megismétlődik.	1 pont	
(A Pitagorasz-tételt alkalmazva) $x^2 + (1 - x)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2$ ,	1 pont	
ahonnan $2x^2 - 2x + \frac{24}{49} = 0$ .	1 pont	
Ennek megoldásai $x_1 = \frac{4}{7}$ és $x_2 = \frac{3}{7}$ ,	2 pont	
ahonnan $1 - x_1 = \frac{3}{7}$ és $1 - x_2 = \frac{4}{7}$ .	1 pont	
A belső négyzet a külső négyzet oldalait 3:4 (vagy 4:3) arányban osztja.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>10 pont</b>	

<b>6. b) első megoldás</b>		
		
$K_1 = 4 \text{ (m)}, K_2 = 4 \cdot \frac{5}{7} \text{ (m)}$ , és (hasonlósági megfontolások miatt) minden további négyzet kerülete $\frac{5}{7}$ -szerese a megelőzőnek.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A négyzetek kerületének összege egy végtelen mértani sor összege, melynek hányadosa $q = \frac{5}{7}$ .	1 pont	
Mivel $ q  < 1$ , ezért a sor konvergens.	1 pont	
A végtelen mértani sor összege: $S = K_1 + K_2 + \dots = K_1 \cdot \frac{1}{1 - q} =$	1 pont	
$= \frac{4}{1 - \frac{5}{7}} = 14.$	1 pont	
Tehát a négyzetek kerületének összege 14 méter.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>6. b) második megoldás</b>		
$K_1 = 4$ (m), $K_2 = 4 \cdot \frac{5}{7}$ (m), és (hasonlósági megfontolások miatt) minden további négyzet kerülete $\frac{5}{7}$ -szerese a megelőzőének.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
A négyzetek kerülete egy olyan mértani sorozatot alkot, melynek első tagja $a_1 = 4$ , hányadosa $q = \frac{5}{7}$ .	1 pont	
A mértani sorozat első $n$ tagjának összege: $S_n = 4 \cdot \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 1}{\frac{5}{7} - 1}$	1 pont	
Mivel $\left(\frac{5}{7}\right)^n \rightarrow 0$ , ha $n \rightarrow \infty$ ,	1 pont	
ezért $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 4 \cdot \frac{0-1}{\frac{5}{7}-1} = 14$ .	1 pont	
Tehát a négyzetek területének összege 14 méter.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>6 pont</b>	

<b>7. a)</b>		
(Ha $r$ a doboz alapkörének sugara, $m$ pedig a doboz magassága cm-ben mérve, akkor) $V = r^2 \pi m$ , ahonnan $m = \frac{V}{r^2 \pi} = \frac{1000}{r^2 \pi}$ (cm).	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgáló részletezés nélkül írja fel helyesen a teljes anyagköltséget.</i>
Az alap- és a fedőlap együttes anyagköltsége $r$ függvényében $0,2 \cdot 2r^2 \pi$ (Ft).	1 pont	
A palást anyagköltsége $r$ függvényében $0,1 \cdot 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2 \pi} = \frac{0,2V}{r} = \frac{200}{r}$ (Ft).	2 pont	
A teljes anyagköltség $r$ függvényében ( $r > 0$ ) $f(r) = 0,4r^2 \pi + \frac{200}{r}$ (Ft).	1 pont	

Az $f$ függvénynek a pozitív számok halmazán ott lehet minimuma, ahol a deriváltja 0.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
$f'(r) = 0,8r\pi - \frac{200}{r^2}$	2 pont*	
$f'(r) = 0$ , ha $r \left( = \sqrt[3]{\frac{200}{0,8\pi}} \right) \approx 4,3$ cm.	1 pont*	
Mivel $f''(r) = 0,8\pi + \frac{400}{r^3} > 0$ , ezért itt valóban minimális $f$ értéke.	1 pont*	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó az első derivált előjelváltásával indokol helyesen.</i>
A minimális anyagköltséghez tartozó magasság $m \left( = \frac{1000}{r^2\pi} \right) \approx 17,2$ cm.	1 pont	
A minimális anyagköltség forintra kerekítve 70 Ft.	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>13 pont</b>	

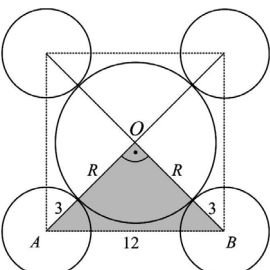
*Megjegyzések:*

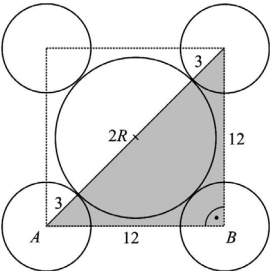
1. Ha a vizsgázó válaszaiban nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.
2. Ha a vizsgázó válaszaiban nem ad meg mértékegységet, akkor ezért a feladatban összesen 1 pontot veszítsen.
3. A \*-gal jelölt 5 pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a vizsgázó:

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával: $f(r) = 0,4r^2\pi + \frac{200}{r} = 0,4\pi \cdot r^2 + \frac{100}{r} + \frac{100}{r} \geq$ $\geq 3 \cdot \sqrt[3]{0,4\pi \cdot r^2 \cdot \frac{100^2}{r^2}} = 3 \cdot \sqrt[3]{4000\pi}$ .	3 pont	
Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $0,4\pi \cdot r^2 = \frac{100}{r}$ ,	1 pont	
ahonnan $r \left( = \sqrt[3]{\frac{100}{0,4\pi}} \right) \approx 4,3$ cm.	1 pont	

### 7. b)

Az adatok átlaga 0,7.	1 pont	
A minta átlagtól mért átlagos abszolút eltérése $\frac{6 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,3 + 1,3 + 2,3}{10} = 0,84$ .	2 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>3 pont</b>	

<b>8. a) első megoldás</b>		
 <p>Jó ábra: az érintkező hengerek egy alkalmas síkmetszetének ábrázolása.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A nagy kör középpontját a négy kis kör középpontjával összekötő négy szakasz által meghatározott szögek (az ábra forgásszimmetriája miatt) derékszögek.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a derékszöget az ábráján tüntette fel.</i>
(A Pitagorasz-tételt alkalmazva pl. az $OAB$ háromszögben:) $(3 + R)^2 + (3 + R)^2 = 12^2 (= 144)$ .	1 pont	
(Mivel $3 + R > 0$ , ezért) $3 + R = \sqrt{72} (= 6\sqrt{2})$ ,	1 pont	$2R^2 + 12R - 126 = 0$ $R_1 \approx 5,485; R_2$ negatív.
ebből (a kért pontossággal) $d = 2R = (12\sqrt{2} - 6 \approx) 10,97$ mm.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>8. a) második megoldás</b>		
 <p>Jó ábra: az érintkező hengerek egy alkalmas síkmetszetének ábrázolása.</p>	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen számol.</i>
A négy kis kör középpontja egy 12 mm oldalú négyzetet alkot.	1 pont	
Ennek a négyzetnek az átlója $12\sqrt{2}$ (mm).	1 pont	
Mivel ez éppen $2R + 6$ ,	1 pont	
ebből (a kért pontossággal) $d = 2R = (12\sqrt{2} - 6 \approx) 10,97$ mm.	1 pont	<i>Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.</i>
<b>Összesen:</b>	<b>5 pont</b>	

<b>8. b) első megoldás</b>		
A piros elemek száma 5, 6, 7 vagy 8 lehet.	1 pont	
Ha a piros elemek száma $k$ , akkor (mivel a piros elemek helye a toronyban már egyértelműen meghatározza a tornyot) az építhető tornyok száma $\binom{8}{k}$ .	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>

Így az ilyen tornyok száma összesen $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = (56 + 28 + 8 + 1 =)$	1 pont	
$= 93.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

**8. b) második megoldás**

Szimmetria okokból azon tornyok száma, amelyek több piros elemet tartalmaznak, megegyezik azon tornyok számával, amelyek több kéket.	1 pont	
Ugyanannyi (4-4) piros és kék elemet tartalmaz $\binom{8}{4} (= 70)$ torony.	1 pont	
(Mivel a torony minden eleme kétféle lehet,) az összes lehetséges különböző tornyok száma $2^8 (= 256)$ .	1 pont	
A megfelelő tornyok száma tehát $\frac{256 - 70}{2} = 93.$	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

*Megjegyzés: A megfelelő pontok járnak, ha a vizsgázó kombináció helyett ismétléses permutációra hivatkozik.*

**8. c)**

Annak a valószínűsége, hogy egy kiválasztott kocka nem selejtes, $\frac{1000000 - 20}{1000000} = 0,99998.$	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy egy $n$ kockát tartalmazó dobozban egyik kocka sem selejtes, $0,99998^n$ .	1 pont	
Ha annak a valószínűsége, hogy a dobozban van selejtes, kisebb 0,01-nál, akkor annak a valószínűsége, hogy a dobozban nincs selejtes, legalább 0,99.	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
Megoldandó a $0,99998^n \geq 0,99$ egyenlőtlenség ( $n \in \mathbf{N}$ ).	1 pont	
(Az $\lg x$ függvény szigorúan monoton növekedése miatt) $n \cdot \lg 0,99998 \geq \lg 0,99.$	1 pont	
Ebből ( $\lg 0,99998 < 0$ miatt) $n \leq \frac{\lg 0,99}{\lg 0,99998} \approx 502,5.$	1 pont	
tehát András legfeljebb 502 darabos készletet vehet.	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>7 pont</b>	

*Megjegyzés: Ha a vizsgázó egyenlőtlenség helyett egyenletet old meg, de nem indokolja, hogy az egyenlet megoldásából hogyan következik az egyenlőtlenség megoldása, akkor legfeljebb 5 pontot kaphat (egyenlet felírása 3 pont, jó megoldása 1 pont, jó válasz 1 pont).*

<b>9. a)</b>		
Az összes kihúzási lehetőségek száma $\binom{17}{3} (= 680)$ .	1 pont	
Három sárga golyót $\binom{8}{3} (= 56)$ -féleképpen, három zöld golyót $\binom{9}{3} (= 84)$ -féleképpen húzhatunk ki,	1 pont	
a kedvező esetek száma így $\binom{8}{3} + \binom{9}{3} (= 140)$ .	1 pont	
A keresett valószínűség $p = \frac{\binom{8}{3} + \binom{9}{3}}{\binom{17}{3}} = \frac{7}{34} \approx 0,206$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>9. b) első megoldás</b>		
Sárga golyó húzásának valószínűsége $\frac{8}{17}$ , zöld golyó húzásának valószínűsége $\frac{9}{17}$ .	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ezek a gondolatok csak a megoldásból derülnek ki.</i>
A kérdéses valószínűség binomiális eloszlást követ,	1 pont	
ezért $p = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{8}{17}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{17}\right)^2 \approx$	1 pont	
$\approx 0,292$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>9. b) második megoldás</b>		
(Mivel minden egyes húzás alkalmával mind a 17 golyót húzhatjuk, ezért) az összes esetek száma $17^5$ .	1 pont	
Mivel három sárga golyó húzására $8^3$ , két zöld golyó húzására $9^2$ lehetőségünk van, a golyók kihúzásának színsorrendje pedig $\binom{5}{3}$ -féle lehet,	1 pont	<i>Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
ezért a kedvező esetek száma $\binom{5}{3} \cdot 8^3 \cdot 9^2$ .	1 pont	
A keresett valószínűség $p = \frac{\binom{5}{3} \cdot 8^3 \cdot 9^2}{17^5} \approx 0,292$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>4 pont</b>	

<b>9. c)</b>		
A kihúzott három szám összege pontosan akkor osztható 3-mal, ha vagy mindhárom ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva,	1 pont	<i>Ez a 2 pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.</i>
vagy 3-as maradékaik páronként különbözők.	1 pont	
0 maradékot a 3, 6, 9, 12, 15 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{5}{3}$ (= 10) -féleképpen lehetséges.	1 pont	
1 maradékot az 1, 4, 7, 10, 13, 16 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{6}{3}$ (= 20) -féleképpen lehetséges.	1 pont	
2 maradékot a 2, 5, 8, 11, 14, 17 számok adnak, közülük három szám húzása $\binom{6}{3}$ (= 20) -féleképpen lehetséges.	1 pont	
A páronként különböző maradékot adó húzások száma $5 \cdot 6^2$ (= 180).	1 pont	
A kedvező esetek száma: $\binom{5}{3} + 2 \cdot \binom{6}{3} + 5 \cdot 6^2$ (= 230).	1 pont	
Mivel az összes esetek száma $\binom{17}{3}$ (= 680), ezért a keresett valószínűség $p = \frac{230}{680} \approx 0,338$ .	1 pont	
<b>Összesen:</b>	<b>8 pont</b>	

*Megjegyzések:*

1. Ha a vizsgázó valamelyik válaszában nem kerekít vagy rosszul kerekít, akkor ezért a teljes feladatban összesen 1 pontot veszítsen.
2. Százalékban megadott helyes válaszok is elfogadhatók.
3. Ha a vizsgázó megoldásában rossz modellt használ (a visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavételt felcseréli), akkor az a) és b) feladatokban 0 pontot, a c) feladatban legfeljebb 4 pontot kaphat.